Nouvelles annales de mathématiques

R. Godefroy

Théorèmes sur les rayons de courbure d'une classe de courbes géométriques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 272-279

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__272_1>

THÉORÈMES SUR LES RAYONS DE COURBURE D'UNE CLASSE DE COURBES GÉOMÉTRIQUES;

PAR M. R. GODEFROY,
Élève de l'École Polytechnique.

Les ellipses et paraboles d'ordre quelconque, courbes représentées en coordonnées cartésiennes par les équations $Ax^m + By^m = C$, $y^m = Ax^n$ jouissent de relations simples entre leurs rayons de courbure et certains éléments de leur figure.

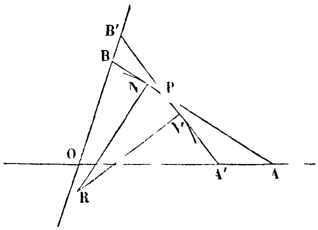
Commençons par les ellipses, dont nous supposerons d'abord le degré entier.

Les normales en deux points voisins $N(x, y)$ et $N'(x', y')$ se coupent en R. Les tangentes correspondantes se coupent en P et rencontrent en A, A' l'axe des abscisses, en B, B′ celui des ordonnées. A la limite N′ viendra coïncider avec N.

Nous appellerons O, A, B les angles du triangle formé par les axes et la tangente AB.

Les triangles NRN′, APA′ ont leurs bases propor-

Fig. 1.



tionnelles aux diamètres de leurs cercles circonscrits.

Ces diamètres sont à la limite le rayon de courbure R en N et le segment a de la perpendiculaire à l'axe OA au pied de la tangente, compris entre cet axe et la normale en N.

Quant aux bases, elles ont pour expression

$$(x - x')\frac{\sin O}{\sin B}, \qquad \frac{C}{A}\,\frac{x^{m-1} - x'^{m-1}}{x^{m-1}x'^{m-1}}.$$

Le principe que nous venons d'invoquer donne alors

$$\frac{R}{a} = \frac{(x - x')\dfrac{\sin O}{\sin B}}{\dfrac{C}{A}\,\dfrac{x^{m-1} - x'^{m-1}}{x^{m-1}x'^{m-1}}} = \frac{A.\sin O\, x^{m-1}x'^{m-1}}{C\sin B(x^{m-2} + x^{m-3}x' + \ldots + x'^{m-2})}$$

$$= \frac{A\sin O\, x^{2m-2}}{(m-1)C\sin B\, x^{m-2}} = \frac{A}{C}\,\frac{\sin O}{(m-1)\sin B}\,x^m$$

ou

$$\frac{R}{a}(m-1)\frac{\sin B}{\sin O} = \frac{A}{C}x^m,$$

de même

$$\frac{R}{b}(m-1)\frac{\sin A}{\sin O} = \frac{B}{C}y^m.$$

en appelant b le segment analogue de a, relatif à l'autre axe.

En ajoutant ces deux égalités, on obtient celle-ci

$$\frac{(m-1)R}{\sin O}\left(\frac{\sin B}{a}+\frac{\sin A}{b}\right)=1,$$

qu'on peut écrire

$$\frac{\sin O}{R}=(m-1)\left(\frac{\sin B}{a}+\frac{\sin A}{b}\right).$$

Cette dernière relation est, sous forme générale, l'expression même du théorème que nous avions en vue.

Nous avons tenu à donner à cette relation sa forme la plus générale; mais la véritable utilité du théorème dépend du cas où les axes de coordonnées sont rectangulaires : $\frac{\sin B}{a}$, $\frac{\sin A}{b}$ sont alors les inverses des segments p, q de la normale en N compris entre chaque axe et sa perpendiculaire au pied de la tangente.

La relation prend alors la forme définitive

$$\frac{1}{R}=(m-1)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right),$$

qui exprime le rayon de courbure en fonction de deux segments analogues de la normale qui le contient. La formule est directement applicable aux sections coniques. Le coefficient $(m-1)$ est ici égal à l'unité. Dans le cas de l'hyperbole, il faut faire précéder du signe — le segment de la normale correspondant à l'axe non transverse.

On ramène aisément cette expression du rayon dans le cas d'une conique à centre à la formule connue

$$R=\frac{d'}{h}$$

(Dupin, *Développements de Géométrie*), où d est le demi-diamètre parallèle à la tangente, et h la distance de ces deux droites.

Considérons en effet une ellipse : α étant l'angle de la tangente avec le grand axe, on a

$$\frac{1}{p} = \frac{\cos^2\alpha}{\mathrm{NA}}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{\cos^2\beta}{\mathrm{NB}};$$

donc

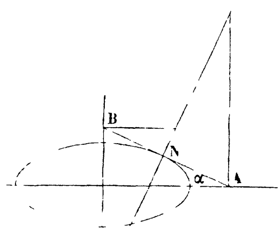
$$\frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{AB}\cos^2\alpha}{\mathrm{NA}.\mathrm{NB}} = \frac{h}{d^2},$$

d'où

$$\mathrm{R} = \frac{d^2}{h}.$$

Pour la parabole, le résultat est particulièrement simple. Cette courbe étant considérée comme limite d'une ellipse dont le grand axe croît indéfiniment, l'un des segments de normale devient infini; par suite, *le rayon de courbure est égal au segment de normale*

Fig. 2.



compris entre l'axe et sa perpendiculaire au pied de la tangente. Cette construction du rayon de courbure conduit à la solution connue ou s'en déduit sans peine par la simple égalité de deux triangles sans qu'il soit nécessaire d'y insister.

Nous avons supposé le degré entier : supposons actuellement que m soit de la forme $\frac{n-1}{n}$, cas qui présente des applications à des courbes connues. La même marche que précédemment donne ici

$$\frac{\sin O}{R} = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin B}{a} + \frac{\sin A}{b}\right),$$

et

$$\frac{n}{R} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q},$$

pour le cas utile des axes rectangulaires.

La parabole rentre dans cette catégorie; si l'on prend effectivement pour axes deux tangentes à la courbe sur lesquelles celle-ci intercepte des longueurs m, n, la parabole a pour équation

$$\left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Prenons deux tangentes orthogonales : p et q étant toujours les mêmes segments de normale considérés jusqu'ici, le rayon de courbure est donné par

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

On voit par là que : une parabole roulant dans un angle droit en entraînant une de ses normales, la moyenne harmonique des segments considérés est constante.

Les développées de sections coniques ayant pour tangente la normale à la courbe dont elles sont la développée, on a de suite les segments p et q reliés au rayon de courbure par la relation

$$\frac{3}{R} = \frac{1}{p} \pm \frac{1}{q},$$

suivant qu'il s'agit de la développée d'ellipse ou de celle d'hyperbole.

La formule étendue à la développée de parabole donne ce théorème très simple :

Le rayon de courbure de la développée de parabole est triple de la portion de normale comprise entre l'axe de la courbe et sa perpendiculaire au point où la normale de la parabole rencontre l'axe.

On voit sur la figure ci-dessous la série d'égalités

$$QR = AM = TN = PS,$$

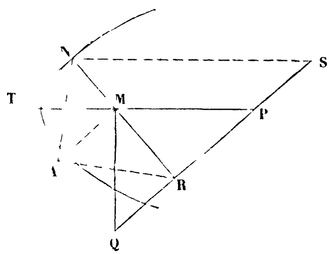
d'où

$$PQ = RS.$$

Le rayon de courbure est donc aussi égal à 3RS.

Ceci nous ramène, pour la parabole, à ce théorème de Maclaurin : Le rayon de courbure en un point de la développée d'une conique est triple du segment de la nor-

Fig. 3.



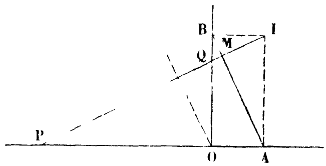
male à la développée compris entre la courbe et le diamètre de la conique correspondant au point considéré de la développée.

L'enveloppe d'une droite de longueur constante a, mobile dans un angle droit, est l'hypocycloïde à quatre rebroussements

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Pour une position AB de la droite, le centre instantané de rotation est en I; M, pied de la perpendiculaire

Fig. 4.



abaissée de ce point sur AB, est le point où AB touche son enveloppe.

La normale MI coupant les axes en P et Q, l'application du théorème donne

$$\frac{3}{R} = \frac{1}{PI} + \frac{1}{QI}.$$

Mais le faisceau des droites OP, OQ, OI et de la parallèle menée par O à AB est harmonique (AB parallèle à un rayon est coupée en segments égaux par les trois autres); on a donc

$$\frac{1}{PI} + \frac{1}{QI} = \frac{2}{2MI} = \frac{1}{MI},$$

par suite

$$R = 3MI.$$

On arrive ainsi à ce résultat remarquable dû à M. Lamarle que, *pour une position de la droite, le rayon de courbure de son enveloppe est triple de la perpendiculaire abaissée du centre instantané de rotation sur la droite*, ou encore triple de la distance de l'origine à la droite.

Il est d'ailleurs dirigé dans le sens MI.

Ce résultat s'aperçoit également sans difficultés en construisant le rayon de courbure de la courbe considérée soit comme épicycloïde, soit comme enveloppe d'une courbe entraînée dans un mouvement épicycloïdal, au moyen de l'une ou de l'autre des deux règles données par Euler.

Les paraboles $y^m = Ax^n$ comprennent les paraboles proprement dites quand m et n sont de même signe et les hyperboles quand ils sont de signes contraires.

Ces courbes jouissent de cette propriété, utilisée pour la quadrature de leurs segments, que deux tangentes quelconques interceptent, sur l'un ou l'autre des axes de coordonnées, une longueur en rapport constant avec la différence des coordonnées correspondantes de leurs points de contact. Par le fait, le rayon de courbure s'exprime séparément en fonction de chacun des segments que nous avons considérés jusqu'ici.

Les mêmes notations que précédemment étant conservées pour le cas actuel, on a les formules

$$\frac{\sin O}{R} = \frac{n-m}{n}\frac{\sin B}{a} = \frac{m-n}{m}\frac{\sin A}{b}$$

et, dans le cas des axes orthogonaux,

$$R = \frac{n}{m-n}p = \frac{m}{m-n}q.$$

Nous retrouvons, en particulier, au moyen de ces formules, les résultats obtenus antérieurement pour la parabole et sa développée.