Sur l'algorithme $[a+b+c\cdots l]^{(n)}$

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 257-272

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__257_0>

SUR L'ALGORITHME $[abc\ldots l]^{(n)}$;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

1. Nous représentons par $[abc\ldots l]^{(n)}$ le résultat que l'on obtient en remplaçant par l'unité les coefficients numériques dans le développement de

$$(a+b+c+\ldots+l)^n.$$

Cet algorithme, que nous avons étudié dans une Note (1) et utilisé dans notre *Théorie élémentaire des séries récurrentes* (2), a fait l'objet de recherches intéressantes, les unes antérieures, les autres postérieures, de la part de MM. Trudi, Fergola, Torelli, Cesaro, etc. Ce dernier a fait voir (3) que cet algorithme est *isobarique composé*.

2. Mettons à part tous les termes qui contiennent a à une puissance quelconque et, dans ces termes, mettons a en facteur commun. Nous voyons alors bien aisément que l'on a

$$(1)\qquad [abc\ldots l]^{(n)} = [bc\ldots l]^{(n)} + a[abc\ldots l]^{(n-1)}.$$

Cette formule se trouve dans notre première Note. Inutile de dire que, l'algorithme considéré étant symétrique par rapport à toutes les quantités qu'il renferme, on peut prendre pour a l'une quelconque de ces quantités.

Appliquant successivement la même transformation

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. II, p. 230.
(2) *Ibid.*, 3e série, t. III, p. 65.
(3) *Ibid.*, 3e série, t. IV, p. 67.

à $[abc\ldots l]^{(n-1)}$, à $[abc\ldots l]^{(n-2)}$, ..., on déduit de la formule précédente la suivante

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} [abc\ldots l]^{(n)} = [bc\ldots l]^{(n)} &+ a[bc\ldots l]^{(n-1)} \\ &+ a^2[bc\ldots l]^{(n-2)} + \ldots + a^n, \end{aligned} \right.$$

qui se trouve également dans ma première Note.

Appliquant la transformation contenue dans cette formule même à $[bc\ldots l]^{(n)}$, à $[bc\ldots l]^{(n-1)}$, ..., on met cette expression sous la forme.

$$\begin{aligned} [abc\ldots l]^{(n)} = [c\ldots l]^{(n)} &+ b[c\ldots l]^{(n-1)} + b^2[c\ldots l]^{(n-2)} + \ldots + b^n, \\ &+ a[c\ldots l]^{(n-1)} + ab[c\ldots l]^{(n-2)} + \ldots + ab^{n-1}, \\ &+ a^2[c\ldots l]^{(n-2)} + \ldots + a^2b^{n-2}, \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &+ a^n; \end{aligned}$$

ou

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} [abc\ldots l]^{(n)} = [c\ldots l]^{(n)} &+ [ab]^{(1)}[c\ldots l]^{(n-1)} \\ &+ [ab]^{(2)}[c\ldots l]^{(n-2)} + \ldots + [ab]^{(n)}. \end{aligned} \right.$$

En continuant à opérer par le même procédé, on arrive à la formule générale que voici :

$$(4)\qquad \left\{ \begin{aligned} &[a\ldots fg\ldots l\ldots s\ldots uv\ldots z]^{(n)} \\ &\quad = \Sigma[a\ldots f]^{(\lambda)}[g\ldots l]^{(\mu)}\ldots[s\ldots u]^{(\rho)}[v\ldots z]^{(\theta)}, \end{aligned} \right.$$

la somme Σ s'étendant à toutes les combinaisons possibles des indices λ, μ, ..., ρ, θ, telles que

$$\lambda + \mu + \ldots + \rho + \theta = n.$$

Cette formule importante comprend toutes les précédentes.

3. Si p des quantités comprises entre les crochets sont égales à une même quantité α, nous écrirons l'algorithme de la façon suivante

$$[\alpha^{(p)} ab\ldots l]^{(n)};$$

quelquefois aussi, pour abréger l'écriture, nous écrirons K au lieu de $ab\ldots l$. Ainsi l'algorithme précédent prendra la forme

$$[\alpha^{(p)}K]^{(n)}.$$

En vertu de la formule (4), prise dans le cas où le nombre des crochets soumis au signe Σ n'est que de deux, on a

$$\begin{aligned}[\alpha^{(p)}K]^{(n)} = [K]^{(n)} + [\alpha^{(p)}]^{(1)}[K]^{(n-1)} + \ldots \\ + [\alpha^{(p)}]^{(i)}[K]^{(n-i)} + \ldots + [\alpha^{(p)}]^{(n)}.\end{aligned}$$

Mais chaque terme de $[\alpha^{(p)}]^{(i)}$ étant égal à α^i, on voit que

$$[\alpha^{(p)}]^{(i)} = \alpha^i[1^{(p)}]^{(i)}.$$

Donc

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}[\alpha^{(p)}K]^{(n)} = [K]^{(n)} + \alpha[1^{(p)}]^{(1)}[K]^{(n-1)} + \ldots \\ + \alpha^i[1^{(p)}]^{(i)}[K]^{(n-i)} + \ldots + \alpha^n[1^{(p)}]^{(n)}.\end{aligned}\right.$$

4. Nous allons calculer $[1^{(p)}]^{(n)}$. Pour cela, posons successivement

$$\sum_{i=0}^{i=n}(a^i + b^i) = \sum_n^1 (a, b),$$

$$\sum_{i=0}^{i=n}\sum_i^1 (a, b) = \sum_n^2 (a, b),$$

$$\sum_{i=0}^{i=n}\sum_i^2 (a, b) = \sum_n^3 (a, b),$$

. . . .

Cette suite d'égalités définit ce que nous entendons par la notation $\sum_n^p (a, b)$ dont nous allons faire usage.

On a

$$\sum_{n}^{1}(a) = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1} + a^n,$$

$$\sum_{n-1}^{1}(a) = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\sum_{1}^{1}(a) = 1 + a,$$

$$\sum_{0}^{1}(a) = 1,$$

Faisant la somme, on en déduit

$$\sum_{n}^{2}(a) = (n+1) + na + (n-1)a^2 + \ldots + 2a^{n-1} + a^n;$$

par suite,

$$\sum_{n-1}^{2}(a) = n + (n-1)a + (n-2)a^2 + \ldots + a^{n-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\sum_{1}^{2}(a) = 2 + a,$$

$$\sum_{0}^{2}(a) = 1.$$

Faisant encore la somme, on a

$$\sum_{n}^{3}(a) = \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} + \frac{n(n+1)}{1.2}a + \ldots + \frac{2.3}{1.2}a^{n-1} + a^n.$$

La loi de formation des coefficients du développement de $\sum\limits_n^p$ apparaît très nettement. On voit que ce sont des nombres triangulaires. On a

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_n^p = & \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{1.2\ldots(p-1)} \\ & + \frac{n(n+1)\ldots(n+p-2)}{1.2\ldots(p-1)} a + \ldots \\ & + \frac{2.3\ldots p}{1.2\ldots(p-1)} a^{n-1} + a^n. \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs, la formule (2) donne successivement

$$\sum_n^1 (a) = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n = [1\,a]^{(n)},$$

$$\sum_n^2 (a) = [1\,a]^{(0)} + [1\,a]^{(1)} + \ldots + [1\,a]^{(n)} = [1^{(2)}\,a]^{(n)},$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\sum_n^p (a) = [1^{(p)}\,a]^{(n)}.$$

La même formule permet encore de développer cette expression comme il suit :

$$(7)\quad \sum_n^p (a) = [1^{(p)}]^{(n)} + a[1^{(p)}]^{(n-1)} + \ldots + a^{n-1}[1^{(p)}]^{(1)} + a^n.$$

La comparaison des formules (6) et (7), qui sont vraies, quel que soit a, montre que

$$(8)\qquad [1^{(p)}]^{(n)} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{1.2\ldots(p-1)}.$$

Cette formule est très remarquable. En effet, si l'on se reporte à la définition que nous avons donnée de

$[abc\ldots l]^{(n)}$, on voit que $[1^{(p)}]^{(n)}$ *est égal au nombre des termes du développement de la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un polynôme à p termes.*

Le calcul que nous venons de faire fournit donc une détermination de ce nombre, indépendante de la théorie des combinaisons.

Représentant par C_m^p le nombre des combinaisons de m objets pris p à p, on pourra écrire la formule précédente

$$(8') \qquad [1^{(p)}]^{(n)} = C_{n+p-1}^{p-1}.$$

5. La formule (2) donne

$$[x\mathrm{K}]^{(n)} = [\mathrm{K}]^{(n)} + x[\mathrm{K}]^{(n-1)} + \ldots + x^m[\mathrm{K}]^{(n-m)} + \ldots + x^n.$$

Dérivons m fois les deux membres de cette égalité par rapport à x; cela nous donne

$$\begin{aligned}\frac{d^m[x\mathrm{K}]^{(n)}}{dx^m} &= 1.2\ldots m[\mathrm{K}]^{(n-m)} + 2.3\ldots(m+1)x[\mathrm{K}]^{(n-m-1)} + \ldots \\ &\quad + (n-m+1)(n-m+2)\ldots n x^{n-m} \\ &= 1.2\ldots m \left\{ [\mathrm{K}]^{(n-m)} + \frac{2.3\ldots(m+1)}{1.2\ldots m} x[\mathrm{K}]^{(n-m-1)} + \ldots \right. \\ &\quad + \frac{(i+1)(i+2)\ldots(i+m)}{1.2\ldots m} x^i[\mathrm{K}]^{(n-m-i)} + \ldots \\ &\quad \left. + \frac{(n-m+1)(n-m+2)\ldots n}{1.2\ldots m} x^{n-m} \right\}.\end{aligned}$$

Or, d'après la formule (8),

$$\frac{(i+1)(i+2)\ldots(i+m)}{1.2\ldots m} = [1^{(m+1)}]^{(i)};$$

La formule précédente devient donc

$$\begin{aligned}\frac{d^m[x\mathrm{K}]^{(n)}}{dx^m} &= 1.2\ldots m \left\{ [\mathrm{K}]^{(n-m)} + x[1^{(m+1)}]^{(1)}[\mathrm{K}]^{(n-m-1)} + \ldots \right. \\ &\quad + x^i[1^{(m+1)}]^{(i)}[\mathrm{K}]^{(n-m-i)} + \ldots \\ &\quad \left. + x^{n-m}[1^{(m+1)}]^{(n-m)} \right\},\end{aligned}$$

ou, en vertu de la formule (5),

$$(9)\qquad \frac{d^m[xK]^{(n)}}{dx^m} = 1.2\ldots m[x^{(m+1)}K]^{(n-m)}.$$

Par application de cette formule, on a

$$\frac{d^{p-1}[xK]^{(p+n-1)}}{dx^{p-1}} = 1.2\ldots(p-1)[x^{(p)}K]^{(n)}.$$

Dérivons m fois les deux membres de cette identité par rapport à x; il vient

$$\frac{d^{m+p-1}[xK]^{(p+n-1)}}{dx^{m+p-1}} = 1.2\ldots(p-1)\,\frac{d^m[x^{(p)}K]^{(n)}}{dx^m}.$$

Mais, toujours d'après (9), on a

$$\frac{d^{m+p-1}[xK]^{(p+n-1)}}{dx^{m+p-1}} = 1.2\ldots(m+p-1)[x^{(m+p)}K]^{(n-m)}.$$

Comparant les deux dernières égalités, on en déduit la formule

$$(10)\qquad \frac{d^m[x^{(p)}K]^{(n)}}{dx^m} = p(p+1)\ldots(p+m-1)\,[x^{(m+p)}K]^{(n-m)},$$

qui généralise (9).

6. D'après la formule (2), on a

$$\sum_{i=0}^{i=n-1}[ab]^{(i)} = [ab]^{(0)}+[ab]^{(1)}+\ldots+[ab]^{(n-1)}$$
$$= [1\,ab]^{(n-1)}.$$

Mais

$$\sum_{i=0}^{i=n-1}[ab]^{(i)} = \frac{a-b}{a-b}+\frac{a^2-b^2}{a-b}+\ldots+\frac{a^n-b^n}{a-b}$$
$$= \frac{(1+a+\ldots+a^n)-(1+b+\ldots+b^n)}{a-b}$$
$$= \frac{\dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}-\dfrac{b^{n+1}-1}{b-1}}{a-1}$$

ou

$$(a-1)(b-1)\sum_{i=0}^{i=n-1}[ab]^{(i)} = ab\,\frac{a^n-b^n}{a-b} - \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}+1$$
$$= ab[ab]^{(n-1)}-[ab]^{(n)}+1.$$

Rapprochant cette formule de la précédente, on voit que

$$(a-1)(b-1)[1\,ab]^{(n-1)} - ab[ab]^{(n-1)} + [ab]^{(n)} = 1.$$

Remplaçons dans cette formule n successivement par $n-1$, $n-2$, ..., cela nous donne

$$\begin{array}{l}
(a-1)(b-1)[1\,ab]^{(n-2)} - ab[ab]^{(n-2)} + [ab]^{(n-1)} = 1,\\
(a-1)(b-1)[1\,ab]^{(n-3)} - ab[ab]^{(n-3)} + [ab]^{(n-2)} = 1,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
(a-1)(b-1)[1\,ab]^{(0)} \quad - ab[ab]^{(0)} \quad + [ab]^{(1)} \quad = 1;
\end{array}$$

écrivons aussi

$$[ab]^{(0)} = 1,$$

et faisons la somme des $n+1$ dernières égalités; il vient, en tenant compte de (2),

$$(a-1)(b-1)[1^{(2)}ab]^{(n-1)} - ab[1\,ab]^{(n-1)} + [1\,ab]^{(n)} = n+1.$$

De même,

$$\begin{array}{l}
(a-1)(b-1)[1^{(2)}ab]^{(n-2)} - ab[1\,ab]^{(n-2)} + [1\,ab]^{(n-1)} = n,\\
(a-1)(b-1)[1^{(2)}ab]^{(n-3)} - ab[1\,ab]^{(n-3)} + [1\,ab]^{(n-2)} = n-1,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
(a-1)(b-1)[1^{(2)}ab]^{(0)} \quad - ab[1\,ab]^{(0)} \quad + [1\,ab]^{(1)} \quad = 2,\\
\hfill [1\,ab]^{(0)} \quad = 1.
\end{array}$$

Faisant encore la somme nous avons

$$(a-1)(b-1)[1^{(3)}ab]^{(n-1)} - ab[1^{(2)}ab]^{(n-1)} + [1^{(2)}ab]^{(n)}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = [1^{(3)}]^{(n)}.$$

Continuant à appliquer le même procédé, on arrive, de proche en proche, à la formule

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}&(a-1)(b-1)[1^{(p)}ab]^{(n-1)}\\ &\quad -ab[1^{(p-1)}ab]^{(n-1)}+[1^{(p-1)}ab]^{(n)}=[1^{(p)}]^{(n)}.\end{aligned}\right.$$

Si dans cette formule on fait $a=b=0$, on a

$$[1^{(p)}]^{(n-1)}+[1^{(p-1)}]^{(n)}=[1^{(p)}]^{(n)},$$

ou, d'après (8'),

$$C_{n+p-2}^{p-1}+C_{n+p-2}^{p-2}=C_{n+p-1}^{p-1},$$

qui est, on le reconnaîtra sans peine, l'expression d'un théorème connu.

Pour $a=b=1$, la formule (11) donne

$$-[1^{(p+1)}]^{(n-1)}+[1^{(p+1)}]^{(n)}=[1^{(p)}]^{(n)}$$

ou, en faisant passer le premier terme du premier membre dans le second,

$$C_{n+p}^{p}=C_{n+p-1}^{p}+C_{n+p-1}^{p-1},$$

qui est encore l'expression du même théorème.

7. $a, b, \ldots, l$ étant les racines de l'équation

$$f(z)=z^p+A_1z^{p-1}+A_2z^{p-2}+\ldots+A_{p-1}z+A_p=0,$$

et Σa^n représentant la somme $a^n+b^n+\ldots+l^n$, on sait que

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{p}{z}+\frac{\Sigma a}{z^2}+\frac{\Sigma a^2}{z^3}+\ldots+\frac{\Sigma a^n}{z^{n+1}}+\ldots.$$

Mais la formule (5) de ma première Note donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{z^p}&+\frac{[ab\ldots l]^{(1)}}{z^{p+1}}\\ &+\frac{[ab\ldots l]^{(2)}}{z^{p+2}}+\ldots+\frac{[ab\ldots l]^{(m)}}{z^{p+m}}+\ldots.\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{\Sigma a^i}{z^{i+1}} = (p z^{p-1} + (p-1)A_1 z^{p-2} + \ldots + A_{p-1}) \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{[ab\ldots l]^{(i)}}{z^{p+i}}.$$

L'identification des deux membres de cette formule fait voir que

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum a^n = p[ab\ldots l]^{(n)} &+ (p-1)A_1[ab\ldots l]^{(n-1)} \\ &+ (p-2)A_2[ab\ldots l]^{(n-2)} + \ldots \\ &+ A_{p-1}[ab\ldots l]^{(n-p+1)}. \end{aligned} \right.$$

8. Dans cette formule faisons $a = b = \ldots = l = 1$. Cela nous donne

$$\begin{aligned} p = p[1^{(p)}] &- p(p-1)[1^{(p)}]^{(n-1)} \\ &+ \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2}[1^{(p)}]^{(n-2)} + \ldots \\ &+ (-1)^{p-1} p [1^{(p)}]^{(n-p+1)} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} 1 = [1^{(p)}]^{(n)} &- (p-1)[1^{(p)}]^{(n-1)} \\ &+ \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}[1^{(p)}]^{(n-2)} + \ldots + (-1)^{p-1}[1^{(p)}]^{(n-p+1)} \end{aligned}$$

ou encore, en vertu de la formule (8′), et en représentant toujours par C_m^n le nombre des combinaisons de m objets n à n, c'est-à-dire le quotient du produit de n nombres consécutifs dont le plus grand est m, par le produit des n premiers nombres entiers, C_m^n étant pris égal à 1 pour $n = 0$ et à 0 pour $n > m$,

$$\begin{aligned} 1 = C_{p-1}^0 &- C_{p-1}^1\, C_{n+p-2}^{p-1} \\ &+ C_{p-1}^2\, C_{n+p-3}^{p-1} - \ldots + (-1)^{p-1} C_{p-1}^{p-1}\, C_n^{p-1}. \end{aligned}$$

Remplaçant dans cette formule $p-1$ par p, on peut l'écrire

$$(13)\qquad 1 = \sum_{i=0}^{i=p} (-1)^i\, C_p^i\, C_{n+p-i}^p.$$

9. Nous allons tirer de la formule (12) d'autres curieuses conséquences. Si les quantités $a, b, \ldots, l$ sont respectivement égales aux p racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_p$, c'est-à-dire sont racines de l'équation

$$z^p - 1 = 0,$$

la formule (12) donne

$$(14) \qquad \sum_{i=0}^{i=p} \omega_i^n = p[\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_p]^{(n)}.$$

Or on sait que $\sum_{i=0}^{i=p} \omega_i^n$ est égale à p ou à 0, suivant que n est, ou non, divisible par p.

Donc $[\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_p]^{(n)}$ est égal à 1 ou à 0 suivant que n est, ou non, divisible par p.

Avant d'aller plus loin, nous conviendrons d'adopter certaines notations. Ainsi nous poserons

$$[\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_p]^{(n)} = \Omega^{(n)}.$$

Si dans cet algorithme nous supprimons l'élément ω_i, nous obtenons un résultat que nous représenterons par $\Omega_i^{(n)}$. Si nous supprimons les éléments ω_i et ω_j, nous écrirons $\Omega_{ij}^{(n)}$, et ainsi de suite.

La formule (1) donne

$$\Omega_1^{(n)} = \Omega^{(n)} - \omega_1 \Omega^{(n-1)};$$

ω_1 est d'ailleurs l'une quelconque des racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité. En nous reportant à la remarque faite plus haut, nous voyons que

$$\begin{array}{ll}
\text{Pour } n = \nu p \ldots\ldots\ldots\ldots & \Omega_1^{(n)} = 1 \\
\text{Pour } n = \nu p + 1 \ldots\ldots\ldots & \Omega_1^{(n)} = -\omega_1 \\
\left.\begin{array}{l}
\text{Pour } n = \nu p + 2 \\
\text{Pour } n = \nu p + 3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\text{Pour } n = \nu p + p - 1
\end{array}\right\} \ldots & \Omega_1^{(n)} = 0
\end{array}$$

De même la formule (1) donne

$$\Omega_{12}^{(n)} = \Omega_1^{(n)} - \omega_2 \Omega_1^{(n-1)}.$$

De cette formule on déduit, en se reportant à ce qui précède, que

$$\begin{array}{ll}
\text{Pour } n = \nu p \dots\dots\dots\dots & \Omega_{12}^{(n)} = 1 \\
\text{Pour } n = \nu p + 1 \dots\dots\dots\dots & \Omega_{12}^{(n)} = -(\omega_1 + \omega_2) \\
\text{Pour } n = \nu p + 2 \dots\dots\dots\dots & \Omega_{12}^{(n)} = \omega_1 \omega_2 \\
\left.\begin{array}{l}
\text{Pour } n = \nu p + 3 \\
\text{Pour } n = \nu p + 4 \\
\dots\dots\dots\dots \\
\text{Pour } n = \nu p + p - 1
\end{array}\right\} \dots\dots & \Omega_{12}^{(n)} = 0
\end{array}$$

De même encore, la formule

$$\Omega_{123}^{(n)} = \Omega_{12}^{(n)} - \omega_3 \Omega_{12}^{(n-1)},$$

déduite de (1), montre que

$$\begin{array}{ll}
\text{Pour } n = \nu p \dots\dots\dots\dots & \Omega_{123}^{(n)} = 1 \\
\text{Pour } n = \nu p + 1 \dots\dots\dots & \Omega_{123}^{(n)} = -(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \\
\text{Pour } n = \nu p + 2 \dots\dots\dots & \Omega_{123}^{(n)} = \omega_1 \omega_2 + \omega_1 \omega_3 + \omega_2 \omega_3 \\
\text{Pour } n = \nu p + 3 \dots\dots\dots & \Omega_{123}^{(n)} = - \omega_1 \omega_2 \omega_3 \\
\left.\begin{array}{l}
\text{Pour } n = \nu p + 4 \\
\text{Pour } n = \nu p + 5 \\
\dots\dots\dots\dots \\
\text{Pour } n = \nu p + p - 1
\end{array}\right\} \dots & \Omega_{123}^{(n)} = 0
\end{array}$$

Ces résultats se généralisent avec la plus grande facilité. On a

$$\begin{array}{ll}
\text{Pour } n = \nu p \dots\dots\dots\dots & \Omega_{12\dots i}^{(n)} = 1 \\
\text{Pour } n = \nu p + 1 \dots\dots\dots\dots & \Omega_{12\dots i}^{(n)} = -(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_i) \\
\text{Pour } n = \nu p + 2 \dots\dots\dots\dots & \Omega_{12\dots i}^{(n)} = \omega_1 \omega_2 + \omega_1 \omega_3 + \dots + \omega_{i-1} \omega_i \\
\text{Pour } n = \nu p + 3 \dots\dots\dots\dots & \Omega_{12\dots i}^{(n)} = -(\omega_1 \omega_2 \omega_3 + \omega_1 \omega_2 \omega_4 + \dots \\
 & \qquad + \omega_{i-2} \omega_{i-1} \omega_i) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\text{Pour } n = \nu p + i \dots\dots\dots\dots & \Omega_{12\dots i}^{(n)} = (-1)^i \omega_1 \omega_2 \dots \omega_i \\
\left.\begin{array}{l}
\text{Pour } n = \nu p + i + 1 \\
\text{Pour } n = \nu p + i + 2 \\
\dots\dots\dots\dots \\
\text{Pour } n = \nu p + p - 1
\end{array}\right\} \dots\dots & \Omega_{1.2\dots i}^{(n)} = 0
\end{array}$$

On peut donc énoncer ce théorème général :

Dans l'algorithme $A = [ab\ldots l]^{(n)}$, *les éléments* $a, b, \ldots, l$, *au nombre de* k, *étant des racines* $p^{\text{ièmes}}$ *de l'unité, toutes différentes les unes des autres, soit* R *le reste de la division de* n *par* p :
1° *Si* R *est nul,* A *est égal à* 1. 2° *Si* R *est un des nombres* 1, 2, 3, ..., $p-k$, A *est égal à plus ou moins la somme des produits* R *à* R *des* $p-k$ *racines* $p^{\text{ièmes}}$ *de l'unité qui n'entrent pas dans la composition de* A, *suivant que* R *est pair ou impair.* 3° *Si* R *est supérieur à* $p-k$, A *est nul.*

En convenant que la somme des produits μ à μ de ν quantités sera prise égale à 1 si $\mu = 0$, et à 0 si $\mu > \nu$, on pourra dire dans tous les cas que A *est égal à la somme des produits* R *à* R *des* $p-k$ *racines* $p^{\text{ièmes}}$ *de l'unité qui n'entrent pas dans la composition de* A, *cette somme étant affectée du signe* + *ou du signe* — *suivant que* R *est pair ou impair.*

10. La formule (12) donne, en remplaçant dans les crochets $ab\ldots l$ par K,

$$
\begin{array}{l}
a^n + b^n + \ldots + l^n = p[K]^{(n)} + (p-1)A_1[K]^{(n-1)} + (p-2)A_2[K]^{(n-2)} + \ldots + A_{p-1}[K]^{(n-p+1)},\\
a^{n-1} + b^{n-1} + \ldots + l^{n-1} = p[K]^{(n-1)} + (p-1)A_1[K]^{(n-2)} + (p-2)A_2[K]^{(n-3)} + \ldots + A_{p-1}[K]^{(n-p)},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
a^{p-1} + b^{p-1} + \ldots + l^{p-1} = p[K]^{(p-1)} + (p-1)A_1[K]^{(p-2)} + (p-2)A_2[K]^{(p-3)} + \ldots + A_{p-1}[K)^{(0)},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\\
a + b + \ldots + l = p[K]^{(1)} + (p-1)A_1[K]^{(0)},\\
1 + 1 + \ldots + 1 = p[K]^{(0)}.
\end{array}
$$

Faisant la somme de toutes ces égalités, nous avons, en vertu de la formule (2) et en faisant usage des notations proposées au n° 4,

$$\sum_n^1 (ab\ldots l) = p[\,1\,\mathrm{K}\,]^{(n)} + (p-1)\,\mathrm{A}_1[\,1\,\mathrm{K}\,]^{(n-1)}$$
$$+ (p-2)\,\mathrm{A}_2[\,1\,\mathrm{K}\,]^{(n-2)} + \ldots + \mathrm{A}_{p-1}[\,1\,\mathrm{K}\,]^{(n-p+1)}.$$

Opérant sur cette nouvelle formule comme nous venons de le faire sur la formule (12), puis encore de la même manière sur le résultat obtenu, et ainsi de suite, suivant la méthode employée dans tout le cours de ce travail, on finit par obtenir la formule générale

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_n^q (ab\ldots l) \\ &\quad = p[\,1^{(q)}\mathrm{K}\,]^{(n)} + (p-1)\,\mathrm{A}_1[\,1^{(q)}\mathrm{K}\,]^{(n-1)} \\ &\quad\quad + (p-2)\,\mathrm{A}_2[\,1^{(q)}\mathrm{K}\,]^{(n-2)} + \ldots + \mathrm{A}_{p-1}[\,1^{(q)}\mathrm{K}\,]^{(n-p+1)}. \end{aligned} \right.$$

Ainsi l'on a

$$\sum_n^q (ab) = 2[\,1^{(q)}ab\,]^{(n)} - (a+b)[\,1^{(q)}ab\,]^{(n-1)},$$

$$\sum_n^q (a) = [\,1^{(q)}a\,]^{(n)}.$$

Cette dernière formule a déjà été trouvée au n° 4.

11. Dans la formule (15), faisons

$$a = b = \ldots = l = 1.$$

Cela nous donne

$$\sum_n^q (1^{(p)}) = p[\,1^{(p+q)}\,]^{(n)} - p(p-1)[\,1^{(p+q)}\,]^{(n-1)}$$
$$+ \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2}[\,1^{(p+q)}\,]^{(n-2)} + \ldots$$
$$+ (-1)^{p-1}p[\,1^{(p+q)}\,]^{(n-p+1)}.$$

ou, d'après la formule (8'),

$$\sum_n^q (1^{(p)}) = C_p^1 C_{n+p+q-1}^{p+q-1} - 2 C_p^2 C_{n+p+q-2}^{p+q-1}$$
$$+ 3 C_p^3 C_{n+p+q-3}^{p+q-1} - \ldots + (-1)^{p-1} p C_p^p C_{n+q}^{p+q-1}$$

ou encore

$$(16) \qquad \sum_n^q (1^{(p)}) = \sum_{i=1}^{i=p} (-1)^{i-1} C_p^i C_{n+p+q-i}^{p+q-1}.$$

12. Remplaçons enfin, dans la formule (15), $a, b, \ldots, l$ par les p racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Nous aurons

$$\sum_n^q (\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_p) = p [1^{(q)} \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_p]^{(n)}$$

ou, d'après la formule (5) et en nous conformant aux notations du n° 9,

$$\begin{aligned} &\sum_n^q (\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_p) \\ &\quad = p \Big\{ [1^{(q)}]^{(n)} + [1^{(q)}]^{(n-1)} \Omega^{(1)} \\ &\qquad\qquad + [1^{(q)}]^{(n-2)} \Omega^{(2)} + \ldots + [1^{(q)}]^{(1)} \Omega^{(n-1)} + \Omega^{(n)} \Big\}. \end{aligned}$$

Or nous avons vu que $\Omega^{(k)}$ est égal à 1 ou à 0 suivant que k est, ou non, divisible par p. Donc, si, divisant n par p, on trouve

$$n = \nu p + \rho,$$

on voit que la formule précédente devient

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_n^q (\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_p) \\ &\quad = p \Big\{ [1^{(q)}]^{(n)} + [1^{(q)}]^{(n-p)} \\ &\qquad\qquad + [1^{(q)}]^{(n-2p)} + \ldots + [1^{(q)}]^{(n-\nu p)} \Big\} \end{aligned} \right.$$

ou, en employant la notation connue $E\left(\frac{n}{p}\right)$ pour représenter la partie entière du quotient de n par p,

$$\sum_n^q (\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_p) = p \sum_{i=0}^{i=\mathrm{E}\left(\frac{n}{p}\right)} [1^{(q)}]^{(n-ip)}.$$

En particulier, pour $n < p$,

$$\sum_n^q (\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_p) = p[1^{(q)}]^{(n)}.$$

D'après la formule (8′), la formule (17) peut s'écrire

$$(17') \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_n^q (\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_p) \\ & \quad = p(C_{n+q-1}^{q-1} + C_{n-p+q-1}^{q-1} + \ldots + C_{n-\nu p+q-1}^{q-1}). \end{aligned} \right.$$