NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DESBOVES

Applications des formules générales qui donnent la solution complète, en nombres entiers, de l'équation homogène du second degré contenant un nombre quelconque d'inconnues

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 226-233

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__226_1>

APPLICATIONS DES FORMULES GÉNÉRALES QUI DONNENT LA SOLUTION COMPLÈTE, EN NOMBRES ENTIERS, DE L'ÉQUATION HOMOGÈNE DU SECOND DEGRÉ CONTENANT UN NOMBRE QUELCONQUE D'INCONNUES (¹);

PAR M. DESBOVES.

Si l'on représente par $F(X, Y, Z, U, \ldots) = 0$ l'équation proposée, que l'on désigne par $(x, y, z, u, \ldots)$ une

(¹) *Voir* l'article publié, 3ᵉ série, t. III; 1884.

solution quelconque de cette équation, puis que l'on pose

$$N = F(r, p, q, s, \ldots),$$
$$M = \frac{dN}{dr}x + \frac{dN}{dp}y + \frac{dN}{dq}z + \frac{dN}{ds}u + \ldots,$$

on a, comme il a été démontré, la solution complète, en nombres entiers, de l'équation proposée, par les formules

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} X = Mr - Nx, \\ Y = Mp - Ny, \\ Z = Mq - Nz, \\ U = Ms - Nu, \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

On peut d'ailleurs simplifier ces formules, sans les rendre moins générales, en faisant nulle l'une des variables $r, p, q, s, \ldots$, r par exemple, dans M, N et les formules (1). Si l'on désigne par M_1, N_1 ce que deviennent M, N quand on y fait $r = 0$, on aura les nouvelles formules

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} X = -N_1 x, \\ Y = M_1 p - N_1 y, \\ Z = M_1 q - N_1 z, \\ U = M_1 s - N_1 u, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Des valeurs de $p, q, s, \ldots$, qui correspondent à une solution connue $(X, Y, Z, U, \ldots)$, peuvent d'ailleurs s'obtenir par les formules

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} p = xY - yX, \\ q = xZ - zX, \\ s = xU - uX, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Problème I. — *Étant donnée l'équation*

$$(4)\qquad X^2 - bY^2 - dXY = Z^2,$$

trouver des formules qui en donnent la solution complète en nombres entiers.

On a dans ce cas

(5) $\quad N_1 = bp^2 - q^2, \qquad M_1 = dpx + 2bpy - 2qz.$

Or l'équation (4) est évidemment satisfaite en prenant $x = 1$, $y = 0$, $z = -1$. On a donc

$$M_1 = dp + 2q,$$

et alors les formules (2) donnent

$$(6) \qquad \begin{cases} X = q^2 - bp^2, \\ Y = dp^2 - 2pq, \\ Z = q^2 + bp^2 - dpq. \end{cases}$$

Ces formules, à la notation près, sont identiques aux formules (5) et (7) du Mémoire sur la résolution de l'équation

$$aX^m - bY^m = cZ^n \ (^1).$$

Seulement, dans le Mémoire cité, on n'avait pas démontré que les formules (5) et (7) donnaient la solution complète, en nombres entiers, de l'équation (4). C'est du reste ce qu'on aurait vu directement en prenant $p = X + Z$, $q = Y$.

Remarque. — On satisfait encore à l'équation (4) en prenant $x = b$, $y = -d$, $z = b$. Alors on obtient les formules suivantes, un peu moins simples que les formules (6),

$$(7) \qquad \begin{cases} X = (q^2 - bp^2)b, \\ Y = dq^2 + 2bpq, \\ Z = (q^2 + bp^2 + dpq)b. \end{cases}$$

Problème II. — *Trouver la solution complète, en*

(1) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVIII; 1879.

nombres entiers, de l'équation

$$X^2 + Y^2 = cZ^2, \tag{8}$$

lorsque c est égal à 1 *ou à la somme des carrés de deux nombres entiers* **m** *et* **n** (1).

On a

$$N_1 = p^2 - cq^2, \qquad M_1 = 2py - 2cqz.$$

Si l'on suppose d'abord $c = 1$, on peut prendre $x = 1$, $y = 0$, $z = -1$; alors on a

$$N_1 = p^2 - q^2, \qquad M_1 = 2q,$$

et les formules générales donnent

$$X = p^2 - q^2, \qquad Y = 2pq, \qquad Z = p^2 + q^2.$$

Remarque. — Si c était égal à un carré m^2, on remplacerait cZ^2 par $(mZ)^2$, et l'on serait ramené au cas précédent.

Supposons maintenant que l'on ait $c = m^2 + n^2$, alors on prendra $x = m$, $y = n$, $z = 1$ et, par suite, on aura

$$M_1 = 2pn - 2cq.$$

En employant les formules générales, on a donc

$$\left\{\begin{aligned} X &= (cq^2 - p^2)m, \\ Y &= p^2 n - 2cpq + cnq^2, \\ Z &= p^2 - 2npq + cq^2. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Remarque. — Pour obtenir toutes les valeurs de X, Y, Z, en grandeur et en signe, on devra mettre les signes + et — devant les seconds membres des formules précédentes. Il en est de même pour les for-

(1) D'après un théorème de Legendre, les deux cas considérés sont les seuls dans lesquels l'équation (8) peut être résolue.

mules (6). Seulement alors il faut prendre ensemble les deux signes + ou les deux signes — devant les seconds membres des deux premières formules.

Soit, comme exemple numérique, l'équation

$$X^2 + Y^2 = 10Z^2. \tag{10}$$

Le nombre 10 étant égal à $3^2 + 1^2$, on a une première solution (3, 1, 1). Alors les formules (9) deviennent

$$X = 3(10q^2 - p^2),$$
$$Y = p^2 - 20pq + 10q^2,$$
$$Z = p^2 - 2pq + 10q^2.$$

Faisons-y, par exemple, $p = 1$, $q = -1$, on obtient la solution (27, 31, 13). Si l'on avait fait $p = 1$, $q = 1$, on aurait retrouvé la solution initiale (3, 1, 1).

Problème III. — *Trouver la solution complète de l'équation*

$$aX^2 + bY^2 + dXY = cZ^2, \tag{11}$$

lorsqu'on a

$$c = a + b + d. \tag{12}$$

Il suffit de faire $x = y = z = 1$ et de changer c en $-c$ dans les formules (3) de l'article déjà cité. On a ainsi

$$\left\{\begin{array}{l} X = -bp^2 - cq^2, \\ Y = (b - d)p^2 - cq^2 - 2cpq, \\ Z = -bp^2 - cq^2 - (d - 2b)pq. \end{array}\right. \tag{13}$$

La remarque relative aux signes des seconds membres qui a été faite à la suite du problème précédent est encore ici applicable.

On peut remplacer les formules (13) par des formules qui s'en déduisent, en y changeant p en $-cp$. La généralité des formules n'en est pas d'ailleurs diminuée, puisque si, dans les nouvelles formules, on remplace q par $-cq$, on a les mêmes valeurs de X, Y, Z, abstraction faite des facteurs communs, qu'en prenant p et q dans les formules (13). Les nouvelles formules nous seront très utiles dans la résolution des équations biquadratiques.

On a d'abord, en divisant par c les seconds membres des équations (13), après y avoir changé p en $-cp$,

$$\begin{aligned} X &= q^2 - bcp^2, \\ Y &= (b - d)cp^2 + q^2 - 2cpq, \\ Z &= -bcp^2 - q^2 - (2b + d)pq, \end{aligned}$$

puis, si l'on complète les carrés de $q \mp cp$ et $q + bp$ et qu'on remplace $b + d - c$, $c - b$ respectivement par $-a$, $a + d$, il vient, en tenant compte des signes,

$$(14)\qquad \left\{ \begin{aligned} X &= \pm(q^2 - bcp^2), \\ Y &= \pm[(q \mp cp)^2 - acp^2], \\ Z &= -[(q + bp)^2 + b(a - d)p^2 - dpq], \end{aligned} \right.$$

les signes supérieurs étant pris ensemble ainsi que les signes inférieurs dans les deux premières formules.

Problème IV. — *Trouver la solution complète, en nombres entiers, de l'équation*

$$(15)\qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = U^2\ (^1)$$

On obtient

$$X_1 = p^2 + q^2 - s^2, \qquad M_1 = 2py + 2qz + 2su,$$

et si l'on prend $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$, $u = 3$, on a

$$M_1 = 2(2p + q + 3s).$$

(1) Voir les *Nouvelles Annales*, p. 111 et 221, 1874.

Les formules (2) donnent alors

$$\begin{aligned}
X &= -2(p^2+q^2-s^2),\\
Y &= 2p(2p+q-3s)-2(p^2+q^2-s^2),\\
Z &= 2q(2p+q-3s)-(p^2+q^2-s^2),\\
U &= 2s(2p+q-3s)-3(p^2+q^2-s^2).
\end{aligned}$$

Si maintenant on effectue les calculs indiqués, on voit qu'on a la solution complète du problème proposé au moyen de l'identité

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
&[2(p^2+q^2-s^2)]^2+\{2[(p-s)^2-q^2+p(q-s)]\}^2\\
&\qquad\qquad\qquad+[(q-s)^2-p^2+4q(p-s)]^2\\
&\quad=\{3[(p-s)^2+q^2]+2s(p-q)\}^2.
\end{aligned}\right.$$

On a d'ailleurs par les formules (3)

$$(17)\quad p=2(Y-X),\qquad q=2Z-X,\qquad s=U-3X,$$

(X, Y, Z, U) représentant une solution donnée dans laquelle X, Y, Z, U ont les signes $\pm$. Veut-on, par exemple, retrouver la solution initiale (2, 2, 1, 3), on ne prendra pas tous les nombres 2, 2, 1, 3 avec le signe $+$, car on trouverait la solution illusoire (0, 0, 0, 0). Mais, si l'on prend $X=-2$, $Y=2$, $Z=1$, $U=3$, on reproduira la solution donnée en faisant $p=2$, $q=1$, $s=3$. Soit maintenant la solution (2, 3, 6, 7), on aura

$$p=1,\quad q=5,\quad s=4\quad \text{ou}\quad p=5,\quad q=7,\quad s=10,\quad \ldots.$$

On trouvera d'une manière semblable les valeurs de p, q, s correspondant aux solutions (23, 14, 2, 27), (53, 34, 2, 63), (36, 200, 27, 205), ..., auxquelles M. Catalan est arrivé de différentes manières.

Généralisation. — On peut se proposer plus généralement de trouver toutes les solutions de l'équation

$$X^2+Y^2+Z^2+\ldots=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots)U^2.$$

le nombre des inconnues dans le premier membre étant quelconque et α, β, γ, ... étant des nombres entiers donnés en même nombre que ces inconnues. On partira alors de la solution initiale $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, 1)$ et l'on appliquera les formules (2).