FRITZ HOFMANN

Sur la marche du cavalier

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 224-226

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__224_0>

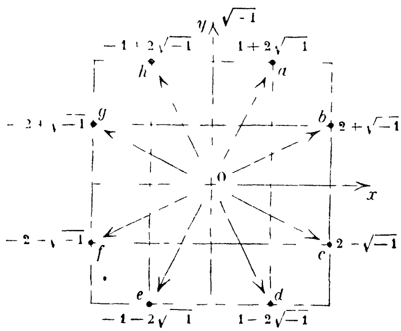
SUR LA MARCHE DU CAVALIER;

PAR M. FRITZ HOFMANN.

THÉORÈME. — *Dans un échiquier de n^2 cases* (n *nombre* impair $= 2m+1$), *comme par exemple dans un échiquier de 49, 81 cases, la marche du cavalier ne peut pas être fermée; c'est-à-dire que le cavalier ne peut pas revenir à son point de départ après avoir touché une fois toutes les cases de l'échiquier.*

Démonstration. — On peut mener par un centre d'origine O (*fig.* 1) des droites parallèles à tout mou-

FIG. 1.

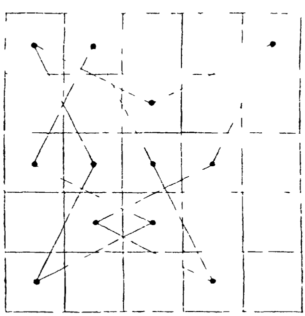


vement du cavalier. Il y a huit espèces de ces droites, différentes en direction, qui aboutissent toutes aux points qui ont pour coordonnées $\pm 1 \pm 2\sqrt{-1}$ ou $\pm 2 \pm \sqrt{-1}$, en donnant au plan de la figure la signification du plan des nombres réels et imaginaires.

Quand le cavalier décrit une courbe quelconque sur l'échiquier pour atteindre un point $\mathfrak{R}$, on aura les coordonnées du point $\mathfrak{R}$ en formant la *somme* des droites qu'on a menées successivement parallèles à ses mouvements par le point O, après avoir superposé la *fig.* 1 sur l'échiquier, de sorte que le point de départ du cavalier ait les cordonnées $0, 0\sqrt{-1}$ de l'origine O.

Quand la courbe décrite par le cavalier est *fermée* (*fig.* 2), on conclura que la somme des droites par O qui représentent ses mouvements est égale à $0 + 0\sqrt{-1}$.

Fig. 2.



Or supposons que le cavalier revienne à sa case primitive après avoir touché toutes les cases (après avoir fait $2m+1$ mouvements). On donnera aux huit points $\pm 1 \pm 2\sqrt{-1}$, $\pm 2 \pm \sqrt{-1}$ de la figure des indices qui nous signalent le nombre de fois qu'un mouvement dans une certaine direction a été exécuté :

$$a,\quad b,\quad c,\quad d,\quad e,\quad f,\quad g,\quad h.$$

Nous aurions d'abord

(I) $a + b + c + d + e + f + g + h =$ nombre impair.

En même temps (*fig.* 1)

(II) $a + 2b + 2c + d - e - 2f - 2g - h = 0,$

(III) $2a + b - c - d - 2e - f + g + 2h = 0;$

en égalant à zéro les deux parties, réelle et imaginaire, de la somme des droites menées par O.

Mais on peut démontrer que les deux équations (II) et (III) ne sauraient coexister avec (I).

Car on tire de (II), après avoir supprimé

$$2(b + c + f + g),$$

$$a + d + (e + h) = \text{nombre pair};$$

de même

$$b + g + (c + f) = \text{nombre pair},$$

après avoir supprimé

$$2(a + d + e + h)$$

dans (III).

Il s'ensuit que

$$a + d + e + h = \text{nombre pair}$$

et

$$b + g + c + f = \text{nombre pair};$$

$$a + b + c + d + e + f + g + h = \text{nombre pair}.$$

Donc, toutes les fois que la marche du cavalier est fermée, le nombre de ses mouvements a été *pair*.

C. Q. F. D.