NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

VICTOR LAC DE BOSREDON

Étude sur les sections planes des surfaces. Théorie nouvelle des plans cycliques et des ombilicis (suite)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 214-223

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__214_0>

ÉTUDE SUR LES SECTIONS PLANES DES SURFACES. THÉORIE NOUVELLE DES PLANS CYCLIQUES ET DES OMBILICS

[SUITE (1)];

PAR M. VICTOR LAC DE BOSREDON,
Professeur à la Faculté des Sciences de l'Institut catholique d'Angers.

II. — SURFACES DÉPOURVUES DE CENTRE.

Les formules (3) conduisent aussi facilement aux sections circulaires des paraboloïdes.

Ces surfaces sont représentées par l'équation générale

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}.$$

Si l'on remplace dans cette équation x, y, z par leurs valeurs tirées des formules (3), il vient

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{B^2}{a^2} \pm \frac{A^2}{b^2}\right)x^2 - \frac{2ABC}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\left(\frac{1}{a^2} \mp \frac{1}{b^2}\right)xy \\ &\qquad + \frac{C^2}{A^2+B^2+C^2}\left(\frac{A^2}{a^2} \pm \frac{B^2}{b^2}\right)y^2 \\ &\qquad = \frac{2(A^2+B^2)^{\frac{3}{2}}}{c\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,y. \end{aligned}\right.$$

Pour que cette section soit un cercle, il faut d'abord, comme pour les surfaces à centre, que l'on ait

$$ABC = 0,$$

c'est-à-dire que l'un des coefficients A, B, C doit être nul. Il en résulte que tout plan cyclique doit passer par l'un des trois axes coordonnés, c'est-à-dire par l'axe de

(1) *Voir* même Tome, p. 186.

la surface ou l'une des normales aux deux plans principaux.

Puisque le plan sécant doit passer par l'un des trois axes coordonnés, nous pouvons encore faire usage des formules réduites (4), (5) et (6).

Paraboloïde elliptique.

Considérons d'abord le paraboloïde elliptique

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c},$$

et supposons $A=0$. Il faudra appliquer les formules (4). En substituant dans l'équation de la surface, à la place des variables, leurs valeurs tirées de ces formules, on trouve

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{C^2y^2}{b^2(B^2+C^2)}=\frac{2By}{c\sqrt{B^2+C^2}}.$$

Pour que cette équation représente un cercle, il faut que l'on ait

$$\frac{1}{a^2}=\frac{C^2}{b^2(B^2+C^2)}$$

ou

$$(12)\qquad B^2b^2=C^2(a^2-b^2),$$

ce qui exige

$$a>b.$$

Alors le plan sécant

$$By+Cz=0$$

passe par la normale à la section principale qui se trouve dans le plan zy.

Or les sections principales sont les deux paraboles

$$x^2=\frac{2a^2}{c}z,\qquad y^2=\frac{2b^2}{c}z.$$

dont les paramètres ont respectivement pour valeurs $\frac{a^2}{c}$ et $\frac{b^2}{c}$. La section principale du plan zy est donc celle de moindre paramètre. Ainsi, dans le paraboloïde elliptique, on obtient des sections circulaires, en coupant la surface par des plans perpendiculaires à la section principale de moindre paramètre.

Si dans l'équation du plan sécant on remplace C par sa valeur tirée de l'équation (12), il vient

$$y\sqrt{a^2 - b^2} \pm bz = 0.$$

Il existe donc deux plans cycliques également inclinés sur le plan déterminé par l'axe de la surface et la normale à la section principale de moindre paramètre.

L'équation de la section dans son plan est

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = \frac{2\mathrm{B}y}{c\sqrt{\mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2}}$$

ou, en remplaçant le rapport $\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}$ par sa valeur tirée de l'équation (12),

$$x^2 + y^2 = \pm \frac{2ay}{c}\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Voyons si l'on peut obtenir une section circulaire en menant le plan sécant par l'axe de la surface. Il faut alors faire $\mathrm{C} = 0$ et appliquer les formules (6).

On trouve alors pour la section

$$\frac{\mathrm{B}^2 x^2}{a^2(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2)} + \frac{\mathrm{A}^2 x^2}{b^2(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2)} = \frac{2y}{c},$$

équation d'une parabole.

Par conséquent, en coupant un paraboloïde elliptique par un plan conduit suivant l'axe de la surface, on obtient toujours des paraboles et jamais des cercles.

Paraboloïde hyperbolique.

Passons enfin au paraboloïde hyperbolique

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}.$$

On déduira ce cas du précédent, en changeant b^2 en $-b^2$ dans la relation (12), qui devient alors

$$-B^2 b^2 = C^2(a^2 + b^2).$$

Cette condition ne peut jamais être remplie. On ne peut donc pas obtenir une section circulaire au moyen d'un plan mené par l'axe des x. Il en sera de même évidemment pour l'axe des y.

Menons un plan par l'axe des z, c'est-à-dire, par l'axe de la surface. Il faut supposer $C = 0$ et employer les formules (6). On trouve ainsi

$$\frac{B^2 x^2}{a^2(A^2 + B^2)} - \frac{A^2 x^2}{b^2(A^2 + B^2)} = \frac{2y}{c},$$

équation d'une parabole, à moins que l'on n'ait

$$\frac{B^2}{a^2} - \frac{A^2}{b^2} = 0,$$

auquel cas l'équation précédente se réduit à $y = 0$, et la section se réduit à une droite confondue avec l'axe des x. Alors la section est rectiligne et dans aucun cas elle n'est circulaire. Il n'existe donc pas de plan cyclique dans le paraboloïde hyperbolique.

Dans le cas où l'on a

$$\frac{B^2}{a^2} - \frac{A^2}{a^2} = 0,$$

si l'on remplace B par sa valeur tirée de cette relation dans l'équation

$$Ax + By = 0$$

du plan sécant, on trouve

$$bx \mp ay = 0.$$

Il existe donc deux plans passant par l'axe, qui coupent la surface suivant une droite. Ces plans sont également inclinés sur chacun des plans principaux. Puisque la section a pour équation $y = 0$, c'est une droite se confondant avec l'axe des x situé dans son plan, c'est-à-dire se confondant avec la trace du plan sécant sur le plan xy. Les deux droites de sections sont par conséquent représentées dans l'espace par les équations

$$z = 0, \qquad \frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0.$$

C'est en effet ce que l'on trouve lorsque dans l'équation de la surface on fait $z = 0$: cette équation se réduit à $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, et elle se décompose en deux

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0.$$

Ainsi toutes les surfaces du second ordre admettent des plans cycliques, excepté le paraboloïde hyperbolique. On peut même supprimer cette exception, si l'on considère les sections rectilignes que l'on obtient dans ce cas comme des cercles d'un rayon infini.

III. — *Cône oblique à base circulaire.*

Étudions encore les plans cycliques du cône oblique à base circulaire.

Si l'on prend le plan du cercle de base pour plan des xy, le centre de ce cercle pour origine des coordonnées, et si l'on fait passer le plan zx par le sommet, le cône aura pour équation en coordonnées rectangulaires

$$(az - cx)^2 + c^2y^2 = r^2(z - c)^2$$

ou

$$(13)\quad (a^2 - r^2)z^2 + c^2x^2 + c^2y^2 - 2ac\,xz + 2r^2cz = r^2c^2,$$

en désignant par a et c les coordonnées du sommet.

Si l'on substitue dans cette équation les valeurs de x, y, z tirées des formules (3), on trouve, pour le coefficient du terme en xy,

$$\frac{2Bac}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Pour que le plan $Ax + By + Cz = 0$ soit un plan cyclique, il faut donc, en premier lieu, que l'on ait

$$B = 0.$$

Ainsi le plan sécant doit passer par l'axe des y.

En faisant cette hypothèse et appliquant les formules (5), on trouve

$$\frac{(a^2 - r^2)A^2y^2}{A^2 + C^2} + \frac{C^2c^2y^2}{A^2 + C^2} + c^2x^2 + \frac{2ACacy^2}{A^2 + C^2} + \frac{2Acr^2y}{\sqrt{A^2 + C^2}} = r^2c^2.$$

Pour que la section soit circulaire, on doit donc avoir en second lieu

$$(a^2 - r^2)A^2 + C^2c^2 + 2ACac = c^2(A^2 + C^2)$$

ou bien

$$A[A(a^2 - r^2 - c^2) + 2Cac] = 0.$$

On satisfera à cette équation en posant soit

$$A = 0,$$

soit

$$A(a^2 - r^2 - c^2) + 2Cac = 0.$$

Dans le premier cas l'équation du plan sécant se réduit à $z = 0$. Donc le plan xy est un plan cyclique, et il en est de même, par conséquent, de tout plan parallèle au plan xy : le résultat était évident *a priori*.

Dans le second cas, on a

$$\frac{A}{C} = -\frac{2ae}{a^2 - r^2 - c^2};$$

par suite, l'équation du plan sécant se réduit à

$$(14) \qquad (a^2 - r^2 - c^2)z - 2acx = 0.$$

Ainsi il existe dans le cône oblique à base circulaire deux séries de plans cycliques. La première se compose de plans parallèles au plan xy; la seconde de plans parallèles au plan représenté par l'équation (14).

Cherchons les angles que fait la trace de ce dernier plan sur le plan xz avec les génératrices du cône.

On obtiendra les équations de ces génératrices, en faisant $y = 0$ dans l'équation du cône. On trouve ainsi

$$az - cx = \pm r(z - c).$$

Il en résulte

$$az - cx = r(z - c)$$

pour la première génératrice, et

$$az - cx = -r(z - c)$$

pour la seconde. Si l'on désigne par α et α' les angles qu'elles font avec l'axe des x, on a donc

$$\tang \alpha = \frac{c}{a - r}, \qquad \tang \alpha' = \frac{c}{a + r}.$$

D'un autre côté, l'angle δ que fait la trace du plan sécant avec l'axe des x est donné par la relation

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{2ac}{a^2 - r^2 - c^2};$$

mais

$$\frac{2ac}{a^2 - r^2 - c^2} = \frac{\frac{c}{a-r} + \frac{c}{a-r}}{1 - \frac{c}{a-r}\frac{c}{a+r}}.$$

Il en résulte

$$\operatorname{tang}\delta = \operatorname{tang}(\alpha + \alpha'),$$

d'où

$$\delta = \alpha + \alpha'.$$

Par conséquent la trace du plan sécant est antiparallèle à l'une ou l'autre des génératrices que l'on considère. Ce plan est donc le plan antiparallèle du cône oblique à base circulaire.

Ombilics des surfaces du second ordre.

Il est très facile, au moyen des résultats précédents, de déterminer les ombilics des surfaces du second ordre. Nous nous bornerons au cas de l'ellipsoïde; le calcul serait le même pour les autres surfaces.

On sait que les ombilics sont les points de contact des plans tangents parallèles aux sections circulaires.

Dans l'ellipsoïde les plans cycliques ont pour équation, comme nous l'avons vu,

$$cx\sqrt{a^2 - b^2} \pm az\sqrt{b^2 - c^2} = 0.$$

Or le plan tangent à l'ellipsoïde au point (x, y, z) est représenté par l'équation

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} + \frac{Zz}{c^2} = 1$$

Pour qu'il soit parallèle aux plans cycliques, il faut que l'on ait

$$\frac{a^2 c\sqrt{a^2 - b^2}}{x} = \pm \frac{c^2 a\sqrt{b^2 - c^2}}{z} = \frac{o}{y}.$$

Il en résulte d'abord

$$y = o,$$

puis

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2}\,\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}.$$

Puisque le point (x, y, z) se trouve sur l'ellipsoïde, on a aussi, à cause de $y = o$,

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}.$$

En substituant cette valeur dans l'équation précédente, on trouve

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2},$$

et par suite

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}.$$

Ainsi les coordonnées des ombilics réels de l'ellipsoïde sont déterminées par les équations

$$y = o, \qquad \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \qquad \frac{z^2}{c^2} = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

Application à la résolution des problèmes.

Voyons enfin comment les formules (3) peuvent servir à la résolution des problèmes. Supposons qu'on ait à résoudre la question suivante :

Chercher le lieu de la droite d'intersection de deux plans rectangulaires menés par deux droites données, et déterminer les sections faites par des plans perpendiculaires à chacune de ces droites.

Si l'on prend l'une des droites pour axe des x, la perpendiculaire commune aux deux droites pour axe des y, et pour axe des z la perpendiculaire au plan xy menée par le point de rencontre de l'axe des x, avec la perpendiculaire commune, on trouve aisément que le lieu est représenté par l'équation

$$y^2 + z^2 - mxz - ay = 0,$$

a désignant la longueur de la perpendiculaire commune, et m le coefficient angulaire de la projection de la seconde droite sur le plan zx.

Pour obtenir les sections perpendiculaires à la première droite, il suffit de faire dans l'équation du lieu $x = \mathrm{K}$, et l'on trouve immédiatement que ces sections sont des cercles, puisqu'ils se projettent en vraie grandeur sur le plan zy.

Un plan perpendiculaire à la seconde droite, mené par l'origine, a pour équation

$$x + mz = 0.$$

Il passe par l'axe des y. Pour avoir l'équation de la section faite par ce plan, il suffit donc d'appliquer les formules (5). Elles deviennent ici

$$x = -\frac{my'}{\sqrt{1+m^2}}, \qquad y = x', \qquad z = \frac{y'}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation de la surface, on trouve

$$x'^2 + \frac{y'^2}{1+m^2} + \frac{m^2 y'^2}{1+m^2} - ax' = 0$$

ou bien

$$x'^2 + y'^2 - ax' = 0,$$

équation d'un cercle.

Il en résulte que tous les plans menés perpendiculairement à l'une ou à l'autre des droites données sont des plans cycliques.