NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

VICTOR LAC DE BOSREDON

Étude sur les sections planes des surfaces. Théorie nouvelle des plans cycliques et des ombilics

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 186-200

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__186_0>

ÉTUDE SUR LES SECTIONS PLANES DES SURFACES. THÉORIE NOUVELLE DES PLANS CYCLIQUES ET DES OMBILICS;

PAR M. VICTOR LAC DE BOSREDON,
Professeur à la Faculté des Sciences de l'Institut catholique d'Angers.

Lorsqu'on veut étudier la forme d'une surface définie par une équation, on coupe la surface par des plans divers, et l'on examine la nature des sections ainsi obtenues. On trouve facilement les projections d'une section sur les plans coordonnés; mais la connaissance de ces projections ne donne qu'une idée imparfaite de la section elle-même.

Pour en déterminer la forme réelle, il est essentiel d'avoir son équation dans son propre plan. La Géométrie analytique fournit des formules qui permettent de trouver cette équation en coordonnées rectangulaires, lorsqu'on donne l'angle φ que fait avec la partie positive de l'axe des x la trace du plan sécant sur le plan xy, et l'angle θ que fait la normale au plan avec l'axe des z. En supposant le plan mené par l'origine des coordonnées, si l'on prend sa trace sur le plan xy pour le nouvel axe des x et une perpendiculaire à cette trace pour le nouvel axe des y, on a les formules suivantes

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi\cos\theta,\\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi\cos\theta,\\ z &= y'\sin\theta.\end{aligned}\right.$$

Dans ces formules l'angle φ est compté en allant de ox vers oy dans l'angle des coordonnées positives, et l'angle θ en allant de oz vers la perpendiculaire à la trace du plan sécant menée dans le plan xy.

Si le plan sécant, au lieu d'être mené par l'origine, passait au point (a, b, c), il faudrait remplacer dans ces formules x, y, z respectivement par $x - a$, $y - b$, $z - c$.

Mais il est rare que les formules précédentes puissent s'appliquer directement; car on ne connaît pas les angles φ et θ. Il m'a semblé qu'il serait utile de les transformer, de manière à les rendre applicables dans le cas général, c'est-à-dire lorsque l'équation du plan se présente sous la forme $Ax + By + Cz + D = 0$.

En partant de cette idée, j'ai établi les formules qui servent de base à ce travail; puis je les ai appliquées à l'étude des sections planes des surfaces du second ordre. Après avoir établi quelques théorèmes fondamentaux, j'ai montré avec quelle facilité cette méthode conduit à la détermination des plans cycliques et des ombilics. Elle peut s'appliquer d'ailleurs à l'étude des sections planes d'une surface quelconque. J'ai indiqué sur un exemple comment elle sert à la résolution des problèmes.

Soit

$$Ax + By + Cz = 0 \tag{2}$$

l'équation d'un plan sécant mené par l'origine des coordonnées. Il s'agit d'exprimer $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\sin\theta$ et $\cos\theta$ en fonction des coefficients de cette équation. On y arrive aisément par les considérations suivantes.

La trace du plan sécant sur le plan xy s'obtiendra en faisant $z = 0$ dans l'équation (2). On trouve ainsi

$$Ax - By = 0 \qquad \text{ou} \qquad y = -\frac{A}{B}x.$$

Il en résulte

$$\tang\varphi = -\frac{A}{B};$$

d'où

$$\sin^2\varphi = \frac{A^2}{A^2+B^2}$$

et, par suite,

$$\sin\varphi = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},$$

D'autre part, on sait que $\cos\theta$ est donné par la relation

$$\cos\theta = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Il en résulte

$$\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Dans les valeurs de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ ainsi obtenues le radical est affecté du double signe. Cela tient à ce que l'angle φ est donné seulement par sa tangente.

Or à une tangente correspondent deux sinus et deux cosinus égaux et de signes contraires. Ces deux valeurs ne déterminent, pour la trace du plan sécant sur le plan xy, qu'une seule position. Elles correspondent aux deux directions opposées qu'elle présente à partir de l'origine. La direction des x' positifs reste ainsi arbitraire. Nous la déterminerons en convenant de prendre pour l'angle φ qu'elle fait avec la partie positive de l'axe des x l'angle qui correspond au signe $+$ du radical et nous écrirons, en mettant le signe de ce radical en évidence,

$$\sin\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

De cette manière, si l'on suppose A positif, $\sin\varphi$ sera toujours positif, et $\cos\varphi$ sera positif ou négatif en même temps que B. Dans le premier cas, l'angle φ sera compris entre o et $\frac{\pi}{2}$; dans le second, il sera compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π.

En particulier, si $A = 0$, φ sera nul ou égal à π suivant le signe de B; dans tous les cas, la trace du plan sécant coïncidera avec l'axe des x. Si $B = 0$, l'angle φ sera égal à $\frac{\pi}{2}$; la partie positive de l'axe des x' coïncidera avec la partie positive de l'axe des y.

Dans les valeurs de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, le radical

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

est aussi affecté du double signe.

Cela tient à ce que l'angle θ est donné seulement par son cosinus. Or à ce cosinus correspondent deux valeurs de θ égales et de signes contraires, ce qui détermine deux inclinaisons égales du plan sécant sur le plan xy à droite et à gauche de sa trace. Nous prendrons encore ici le radical $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ avec le signe $+$, et nous écrirons, en mettant le signe en évidence,

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad \cos\theta = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

De cette manière, $\sin\theta$ sera toujours positif et $\cos\theta$ sera positif ou négatif en même temps que C. Dans le premier cas, l'angle θ sera compris entre o et $\frac{\pi}{2}$; dans le second, il sera compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π. En particulier, si A et B sont nuls, θ sera égal à o ou à π suivant le signe de C; la perpendiculaire élevée sur le plan sécant coïncidera avec l'axe des z, et le plan sécant se confondra avec le plan xy. Si C est nul, l'angle θ sera égal à $\frac{\pi}{2}$, et le plan sécant perpendiculaire sur le plan xy.

Avec ces conventions, les angles φ et θ varieront seulement entre o et π. La grandeur de chacun de ces angles sera déterminée par les signes des coefficients A, B, C, joints à leur valeur numérique.

Si on laisse ces coefficients arbitraires, le plan sécant $Ax + By + Cz = 0$ pourra occuper une position quelconque autour de l'origine, et par conséquent le plan $A(x-a) + B(y-b) + C(z-c) = 0$ une position quelconque autour du point (a, b, c).

En substituant, dans les formules (1), les valeurs de $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\sin\theta$, $\cos\theta$, ainsi déterminées, on obtient les formules suivantes :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{Bx'}{\sqrt{A^2+B^2}} - \frac{ACy'}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\\ y &= -\frac{Ax'}{\sqrt{A^2+B^2}} - \frac{BCy'}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\\ z &= y'\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \end{aligned}\right.$$

Pour avoir maintenant l'équation de la ligne d'intersection d'une surface par un plan, rapportée à deux axes rectangulaires tracés dans le plan sécant, il suffira de substituer dans l'équation de la surface les valeurs de x, y, z tirées des formules précédentes.

Nous supposons, bien entendu, que le plan sécant passe par l'origine des coordonnées. S'il était mené par le point (a, b, c), il faudrait remplacer, comme nous l'avons dit, x, y, z par $x-a$, $y-b$, $z-c$.

Il faut remarquer que les formules (3) sont linéaires par rapport aux variables. Par conséquent, si l'on substitue à la place de x, y, z les valeurs qu'elles fournissent dans une équation de degré m, le degré de cette équation ne changera pas.

Donc un plan coupe toujours une surface du degré m suivant une courbe de l'ordre m. En particulier, un plan coupe une surface du second ordre suivant une conique.

Les formules (3) supposent, il est vrai, que le plan sécant est mené par l'origine des coordonnées. Mais, si l'on veut le mener par un point quelconque (a, b, c) de l'espace, on pourra prendre ce point pour origine des coordonnées, ce qui ne changera pas le degré de l'équation de la surface, et les conclusions resteront les mêmes.

On peut voir encore que la section faite dans une surface du second ordre par un plan quelconque parallèle au plan sécant de l'origine est homothétique à la section déterminée par ce dernier plan.

En effet, si le plan sécant de l'origine a pour équation $Ax + By + Cz = 0$, tout plan parallèle à celui-là aura pour équation

$$Ax - By - Cz = K.$$

Ce plan coupe l'axe des z au point $\frac{K}{C}$, il passe donc au point $x = 0$, $y = 0$, $z = \frac{K}{C}$. Il suffira donc, pour avoir la section du nouveau plan, de remplacer dans les formules (3) z par $z - \frac{K}{C}$, ce qui n'altérera pas évidemment les coefficients des termes du second degré. Ainsi se trouve établie directement, et sans aucune transformation de coordonnées, l'homothétie des sections parallèles dans les surfaces du second ordre.

On peut déduire des formules (3), comme cas particuliers, quelques autres formules très utiles dans les applications.

Si $A = 0$, les formules (3) se réduisent aux suivantes :

$$(4)\qquad \begin{cases} x = x', \\ y = \dfrac{Cy'}{\sqrt{B^2+C^2}}, \\ z = \dfrac{By'}{\sqrt{B^2+C^2}}. \end{cases}$$

Si $B = 0$, on trouve

$$(5)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{Cy'}{\sqrt{A^2+C^2}}, \\ y = x', \\ z = \dfrac{Ay'}{\sqrt{A^2+C^2}}. \end{cases}$$

Enfin, si $C = 0$, il vient

$$(6)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{Bx'}{\sqrt{A^2+B^2}}, \\ y = \dfrac{Ax'}{\sqrt{A^2+B^2}}, \\ z = y'. \end{cases}$$

Le plan sécant passe dans le premier cas par l'axe des x, dans le second par l'axe des y, dans le troisième par l'axe des z. La trace du plan sécant sur le plan xy se confond dans le premier cas avec l'axe des x, dans le second avec l'axe des y, et dans le troisième elle est représentée par l'équation même du plan sécant

$$Ax + By = 0.$$

Appliquons cette méthode à l'étude des sections planes des surfaces du second ordre, et considérons d'abord les sections circulaires.

Sections circulaires des surfaces du second ordre.

I. — Surfaces a centre.

Les surfaces du second ordre douées d'un centre unique peuvent être représentées par l'équation générale

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Si l'on substitue dans cette équation les valeurs de x, y, z fournies par les formules (3), on trouve

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{B^2}{a^2} \pm \frac{A^2}{b^2}\right) x^2 - \frac{2ABC}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \left(\frac{1}{a^2} \mp \frac{1}{b^2}\right) xy \\ &+ \frac{1}{A^2+B^2+C^2} \left[\frac{A^2C^2}{a^2} \pm \frac{B^2C^2}{b^2} \pm \frac{(A^2+B^2)^2}{c^2}\right] y^2 = A^2+B^2 \end{aligned} \right.$$

On obtient ainsi pour section une conique. Cette conique appartiendra au genre ellipse, au genre hyperbole ou au genre parabole, suivant les valeurs attribuées aux coefficients des inconnues. Mais on peut remarquer déjà qu'on n'aura jamais une parabole proprement dite; car, lorsqu'une équation du second degré se présente sous la forme

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - F = 0,$$

la condition

$$AC - B^2 = 0$$

rend le trinôme $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ carré parfait, de sorte que l'équation peut s'écrire

$$(x\sqrt{A} + y\sqrt{C})^2 - F = 0,$$

et elle représente deux droites parallèles. C'est ce qu'indique aussi le discriminant de l'équation générale, qui se réduit alors à $F(AC - B^2)$. Il est nul, si $AC - B^2 = 0$.

Cherchons maintenant à quelles conditions la section sera circulaire.

Pour que l'équation (7) représente un cercle, il faut d'abord que l'on ait

$$ABC = 0.$$

Ainsi l'un des trois coefficients A, B, C doit être nul, c'est-à-dire, que le plan sécant doit être mené par l'un des trois axes coordonnés ou, en d'autres termes, par l'un des trois axes de la surface.

Il résulte de là que, dans la recherche des plans cycliques, nous pouvons employer les formules réduites (4), (5) et (6).

Ellipsoïde.

Considérons d'abord l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Supposons, par exemple, $B = 0$. Il faudra substituer dans l'équation de la surface les valeurs de x, y, z tirées des formules (5). On aura ainsi, en supprimant les accents des variables,

$$\frac{C^2 x^2}{a^2(A^2 + C^2)} + \frac{r^2}{b^2} + \frac{A^2 y^2}{c^2(A^2 + C^2)} = 1.$$

Cette équation représentera un cercle, si l'on a

$$\frac{1}{A^2 + C^2}\left(\frac{C^2}{a^2} + \frac{A^2}{c^2}\right) = \frac{1}{b^2}$$

ou

$$(8) \qquad A^2 a^2(b^2 - c^2) = C^2 c^2(a^2 - b^2),$$

ce qui exige

$$a > b > c$$

Donc l'axe b par lequel il faut mener le plan sécant doit être l'axe moyen de la surface.

L'équation du plan sécant se réduit alors à

$$Ax + Cz = 0,$$

et, si l'on remplace C par sa valeur tirée de la relation (8), elle devient

$$cx\sqrt{a^2 - b^2} \pm az\sqrt{b^2 - c^2} = 0.$$

On voit donc qu'il existe dans l'ellipsoïde deux plans cycliques. Les traces de ces plans sur le plan xz font avec l'axe des x des angles ψ déterminés par la relation

$$\tang\psi = \mp \frac{c\sqrt{a^2 - b^2}}{a\sqrt{b^2 - c^2}}.$$

Ces plans sont donc également inclinés sur le plan déterminé par l'axe moyen et l'un des deux autres axes de la surface.

Le cercle de section a pour équation dans son plan, à cause de la relation (8),

$$x^2 + y^2 = b^2,$$

et son rayon est egal au demi-axe b.

Dans les résultats qui précèdent, nous avons admis implicitement que les trois axes de l'ellipsoïde étaient inégaux. Examinons le cas où la surface a deux axes égaux.

Supposons, par exemple, $a = b$. Il résulte alors de la relation (8) que $A = 0$; par conséquent l'équation du plan sécant se réduit à $z = 0$. Ce plan se confond avec le plan xy, ce qui doit être, puisque alors l'ellipsoïde est de révolution autour de l'axe des z.

Enfin, si l'on a à la fois $a = b = c$, l'ellipsoïde devient une sphère. La relation (8) est vérifiée identiquement

Donc toutes les sections faites par des plans menés par un axe quelconque de la surface sont des cercles, et comme tous les diamètres de la sphère sont des axes de la surface, il en résulte que toutes les sections planes sont circulaires.

Hyperboloïde à une nappe.

Considérons maintenant l'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Pour avoir les plans cycliques, il suffit de remplacer dans la relation (8) c^2 par $-c^2$. On a ainsi l'équation de condition

$$(9) \qquad A^2 a^2 (b^2 + c^2) = C^2 c^2 (b^2 - a^2),$$

ce qui exige

$$b > a$$

On obtiendra donc un plan cyclique en menant le plan sécant par le plus grand des axes réels de la surface.

Le plan sécant a alors pour équation

$$Ax - Cz = 0$$

et, en remplaçant C par sa valeur tirée de la relation (9),

$$cx\sqrt{b^2 - a^2} \pm az\sqrt{b^2 + c^2} = 0.$$

Il existe donc deux plans cycliques, également inclinés sur le plan déterminé par le plus grand des axes réels et l'un des deux autres axes de la surface.

Le cercle de section a pour équation dans son plan

$$x^2 - y^2 = b^2.$$

Voyons maintenant si l'on peut obtenir une section circulaire, en menant le plan sécant par l'axe imaginaire de la surface.

Il faut alors supposer $C = 0$ et appliquer les formules (6). On trouve ainsi

$$\frac{B^2 x^2}{a^2(A^2 + B^2)} + \frac{A^2 x^2}{b^2(A^2 - B^2)} - \frac{y^2}{c^2} = 1.$$

Pour que cette équation représente un cercle, il faut que l'on ait

$$\frac{1}{A^2 - B^2}\left(\frac{B^2}{a^2} + \frac{A^2}{b^2}\right) = -\frac{1}{c^2},$$

condition impossible à réaliser; par conséquent, un plan mené par l'axe imaginaire de l'hyperboloïde à une nappe ne peut pas être un plan cyclique.

Si la surface est de révolution, c'est-à-dire si $a = b$, la relation (9) est impossible, à moins que l'on n'ait $A = 0$. Le plan cyclique se confond alors avec le plan xy.

Hyperboloïde à deux nappes.

On déduira le cas de l'hyperboloïde à deux nappes

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

de celui de l'ellipsoïde, en remplaçant dans la relation (8) b^2 et c^2 par $-b^2$ et $-c^2$. On trouve ainsi

$$(10) \qquad A^2 a^2(b^2 - c^2) = C^2 c^2(a^2 - b^2).$$

ce qui exige

$$b > c.$$

On obtiendra donc une section circulaire, en menant le plan sécant par le plus grand des axes imaginaires de la surface.

Le plan sécant, en vertu de la relation (10), a pour équation

$$cx\sqrt{a^2+b^2} - az\sqrt{b^2-c^2} = 0.$$

Il existe donc deux plans cycliques, également inclinés sur le plan déterminé par le plus grand des axes imaginaires et l'un des deux autres axes de la surface.

Le cercle de section a pour équation dans son plan

$$x^2 + y^2 = -b^2,$$

par conséquent il est imaginaire. Donc le plan considéré ne rencontre pas la surface.

Mais, si l'on coupe l'hyperboloïde par un plan parallèle à celui-là, et ayant pour équation

$$Ax + Cz = K,$$

on aura des sections réelles pour des valeurs de K suffisamment grandes. En effet, ce plan coupe l'axe des x au point $\frac{K}{A}$. Il passe donc au point $x = \frac{K}{A}$, $y = 0$, $z = 0$; par conséquent, il faudra remplacer dans les formules (5) x par $x - \frac{K}{A}$, pour avoir la section faite par ce nouveau plan dans la surface. Si l'on substitue dans l'équation de l'hyperboloïde les valeurs de x, y, z tirées des formules (5) ainsi modifiées, il vient

$$\frac{y^2}{A^2+C^2}\left(\frac{C^2}{a^2} - \frac{A^2}{c^2}\right) + \frac{2CKy}{Aa^2\sqrt{A^2+C^2}} - \frac{x^2}{b^2} = 1 - \frac{K^2}{A^2a^2}.$$

Pour que cette section soit circulaire, il faut que l'on ait, comme précédemment,

$$\frac{1}{A^2+C^2}\left(\frac{C^2}{a^2} - \frac{A^2}{c^2}\right) = -\frac{1}{b^2}$$

ou

$$A^2a^2(b^2-c^2) = C^2c^2(a^2-b^2).$$

Supposons cette condition remplie et divisons l'équation par le coefficient de x^2, nous aurons

$$x^2+y^2-\frac{2Cb^2Ky}{Aa^2\sqrt{A^2+C^2}}=b^2\left(\frac{K^2}{A^2a^2}-1\right).$$

On obtiendra donc un cercle qui sera réel, dès que l'on donnera à K une valeur satisfaisant à l'inégalité

$$\frac{K^2}{A^2}\left[1+\frac{C^2b^2}{a^2(A^2+C^2)}\right]>a^2$$

ou, en remplaçant le rapport $\frac{C}{A}$ par sa valeur tirée de la relation (10), à l'inégalité

$$\frac{K^2}{A^2}>\frac{a^2(a^2+c^2)}{a^2+b^2},$$

c'est-à-dire dès que l'on donnera au rapport $\frac{K}{A}$ une valeur absolue plus grande que $a\sqrt{\frac{a^2+c^2}{a^2+b^2}}$, c'est-à-dire enfin, dès que la distance à l'origine du point où le plan sécant rencontre l'axe des x sera supérieure à la quantité

$$a\sqrt{\frac{a^2+c^2}{a^2+b^2}}.$$

Voyons maintenant ce qui arrive lorsque le plan sécant passe par l'axe réel a de la surface.

Il faut alors supposer $A=0$ et appliquer les formules (4). On trouve ainsi

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{C^2y^2}{b^2(B^2+C^2)}-\frac{B^2y^2}{c^2(B^2+C^2)}=1,$$

et, pour que cette section soit circulaire, il faut que l'on ait

$$\frac{1}{a^2}=-\frac{1}{B^2+C^2}\left(\frac{C^2}{b^2}+\frac{B^2}{c^2}\right),$$

relation impossible. Donc on n'obtient pas de section circulaire en menant le plan sécant par l'axe réel de la surface.

Par conséquent, les seuls plans cycliques de l'hyperboloïde à deux nappes sont les plans parallèles aux deux plans représentés par l'équation

$$cx\sqrt{a^2+b^2} \pm az\sqrt{b^2-c^2} = 0,$$

en supposant que $2b$ désigne le plus grand des axes imaginaires de la surface. (*A suivre.*)