M. DU CHATENET

Détermination des systèmes de cartes de géographie dans lesquels tous les cercles de la sphère sont représentés par des cercles

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 168-176

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__168_1>

DÉTERMINATION DES SYSTÈMES DE CARTES DE GÉOGRAPHIE DANS LESQUELS TOUS LES CERCLES DE LA SPHÈRE SONT REPRÉSENTÉS PAR DES CERCLES;

PAR M. M. DU CHATENET.

Le cercle est la plus intéressante de toutes les courbes que l'on peut tracer sur une sphère; on a très souvent besoin de le représenter sur une carte, soit pour figurer les parallèles, soit pour exécuter diverses constructions graphiques. Il sera donc avantageux d'avoir des systèmes de cartes dans lesquels un cercle quelconque de la sphère sera représenté par une courbe simple et facile à décrire, avec la règle et le compas. Comme on ne peut concevoir de cartes telles que tous les petits cercles soient transformés suivant des droites, nous chercherons quelles sont celles qui permettent de les représenter par des cercles.

Pour fixer sur le plan de la carte la position d'un point de la sphère déterminé par sa longitude α et sa latitude λ, nous adopterons les coordonnées rectilignes ordinaires x, y et nous poserons

$$u = x + y\sqrt{-1}, \qquad v = x - y\sqrt{-1}.$$

Soient X, Y, Z les coordonnées d'un point de la sphère en prenant l'axe des pôles pour axe des Z, et l'équateur pour plan des XY. Les équations d'un cercle seront celle de la sphère et celle d'un plan quelconque. On aura son équation sphérique en prenant pour unité le rayon de la sphère et remplaçant XYZ en fonction de α et λ,

$$X = \cos\lambda\cos\alpha, \qquad Y = \cos\lambda\sin\alpha, \qquad Z = \sin\lambda.$$

L'équation générale des cercles sera donc

$$\sin\lambda + (A\cos\alpha + B\sin\alpha)\cos\lambda - C = 0,$$

ce qui peut aussi s'écrire comme il suit

$$\begin{aligned} &2\tan\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)(A\cos\alpha - B\sin\alpha) \\ &\quad -(C-1)\tan^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) + C + 1 = 0. \end{aligned}$$

Nous poserons, pour la commodité du calcul,

$$p = \tan\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)\left(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha\right),$$

$$q = \tan\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)\left(\cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha\right).$$

L'équation sphérique des cercles deviendra alors de la forme

(1) $$pq + Pp + Qq + R = 0.$$

Prenons son équation différentielle caractéristique en considérant q comme variable indépendante.

En egalant à zéro les trois dérivées successives, nous aurons

$$q\frac{dp}{dq} + P\frac{dp}{dq} + p + Q = 0,$$

$$q\frac{d^2p}{dq^2} + P\frac{d^2q}{dq^2} + 2\frac{dp}{dq} = 0,$$

$$q\frac{d^3p}{dq^3} + P\frac{d^3p}{dq^3} + 3\frac{d^2p}{dq^2} = 0.$$

En éliminant P et Q entre ces trois équations, nous obtenons l'équation différentielle cherchée

(2) $$2\frac{dp}{dq}\frac{d^3p}{dq^3} = 3\left(\frac{d^2p}{dq^2}\right)^2.$$

Étant donnée la position d'un point de la sphère par ses coordonnées p et q, nous pourrons connaître sa position sur la carte si nous connaissons les relations

(3) $$u = \varphi(p, q), \qquad v = \psi(p, q),$$

qui lient les coordonnées planes aux coordonnées sphériques. Le problème revient donc à déterminer la forme des fonctions φ et ψ.

L'équation générale des cercles sur la carte est

$$x^2 + y^2 - mx - ny - s = 0.$$

Remplaçons x et y en fonction de u et v; cette équation deviendra

(4) $$uv + Mu + Nv - S = 0;$$

par conséquent l'équation suivante

(5) $$\varphi\psi + M\varphi + N\psi - S = 0$$

devra être celle du cercle de la sphère correspondant au cercle de la carte défini par (4).

Formons son équation différentielle caractéristique en prenant les trois dérivées successives, q étant considéré comme variable indépendante, nous aurons les trois équations qui suivent

$$\varphi\psi' - \psi\varphi' - M\varphi' + N\psi' = 0,$$
$$\varphi\psi'' - \psi\varphi'' - 2\varphi'\psi' + M\varphi'' - N\psi'' = 0,$$
$$\varphi\psi''' - \psi\varphi''' - 3\varphi''\psi' - 3\psi''\varphi' - M\varphi''' - N\psi''' = 0.$$

En éliminant M et N entre ces trois relations, nous aurons l'équation différentielle cherchée

$$(6) \qquad 2\varphi'\psi'(\psi\varphi''' - \varphi\psi''') = 3\psi'^2\varphi''^2 - 3\varphi'^2\psi''^2.$$

Cette équation ne doit pas différer de l'équation (2) caractéristique des cercles de la sphère. Nous exprimerons donc que les coefficients des équations (2) et (6) sont proportionnels.

Le développement de l'équation (6) serait extrêmement compliqué; mais on peut facilement calculer le coefficient de $\frac{d^3p}{dq^3}$. Ce sera, après réduction,

$$2\left(\frac{d\psi}{dq}\frac{d\varphi}{dp} - \frac{d\varphi}{dq}\frac{d\psi}{dp}\right)$$
$$\times\left[\frac{d\varphi}{dp}\frac{d\psi}{dp}\left(\frac{dp}{dq}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dp}\frac{d\psi}{dq} + \frac{d\varphi}{dq}\frac{d\psi}{dp}\right)\frac{dp}{dq} + \frac{d\varphi}{dq}\frac{d\psi}{dq}\right].$$

Or, dans l'équation (2), le coefficient de $\frac{d^3p}{dq^3}$ est simplement $2\frac{dp}{dq}$. Il faut donc, pour que les relations (2) et (6) puissent être identiques, que l'on ait à la fois

$$\frac{d\varphi}{dp}\frac{d\psi}{dp} = 0, \qquad \frac{d\varphi}{dq}\frac{d\psi}{dq} = 0.$$

Ces conditions seront satisfaites quand on aura

$$\frac{d\varphi}{dq} = 0, \qquad \frac{d\psi}{dp} = 0.$$

En vertu de la symétrie de toutes les formules précédentes, les conditions $\frac{d\varphi}{dp} = 0$, $\frac{d\psi}{dp} = 0$ ne sauraient introduire dans le résultat définitif une solution distincte.

Nous voyons donc ainsi que φ et ψ ne devront chacun contenir que l'une des variables. Dès lors le développement de l'équation (6) devient réalisable. Nous aurons, en effet,

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dp}\frac{dp}{dq}, \qquad \psi' = \frac{d\psi}{dq};$$

$$\varphi'' = \frac{d\varphi}{dp}\frac{d^2p}{dq^2} + \frac{d^2\varphi}{dp^2}\left(\frac{dp}{dq}\right)^2, \qquad \psi'' = \frac{d^2\psi}{dq^2};$$

$$\varphi''' = \frac{d\varphi}{dp}\frac{d^3p}{dq^3} + 3\frac{d^2\varphi}{dp^2}\frac{dp}{dq}\frac{d^2p}{dq^2} + \frac{d^3\varphi}{dp^3}\left(\frac{dp}{dq}\right)^3, \qquad \psi''' = \frac{d^3\psi}{dq^3}.$$

En portant ces valeurs dans (6), l'équation simplifiée deviendra

$$2\frac{dp}{dq}\left(\frac{d\psi}{dq}\right)^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2\frac{d^3p}{dq^3} + \left(\frac{d\psi}{dq}\right)^2\left[2\frac{d\varphi}{dp}\frac{d^3\varphi}{dp^3} - 3\left(\frac{d^2\varphi}{dp^2}\right)^2\right]\left(\frac{dp}{dq}\right)^4$$
$$- \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2\left[2\frac{d\psi}{dq}\frac{d^3\psi}{dq^3} - 3\left(\frac{d^2\psi}{dq^2}\right)^2\right] = 3\left(\frac{d\psi}{dq}\right)^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2\left(\frac{d^2p}{dq^2}\right)^2.$$

Les conditions pour que cette équation ne diffère pas de (2) sont

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} 2\frac{d\varphi}{dp}\frac{d^3\varphi}{dp^3} &= 3\left(\frac{d^2\varphi}{dp^2}\right)^2, \\ 2\frac{d\psi}{dq}\frac{d^3\psi}{dq^3} &= 3\left(\frac{d^2\psi}{dq^2}\right)^2. \end{aligned}\right.$$

Ces équations sont facilement intégrables et ont pour solution

$$\varphi = u = \frac{ap + b}{p - c}, \qquad \psi = v = \frac{a'q - b'}{q + c'}$$

ou, en résolvant par rapport à p et q,

$$p = \frac{cu + b}{u - a}, \qquad q = \frac{c'v - b'}{a' - v}.$$

On déduit de là

$$2x = u + v = \frac{ap+b}{p+c} + \frac{a'q+b'}{q+c'},$$

$$2y\sqrt{-1} = u - v = \frac{ap+b}{p+c} - \frac{a'q+b'}{q+c'},$$

ou

$$2x = \frac{\left[\begin{array}{l}(a+a')\mathrm{R}^2 + (ac'+ca'+b+b')\mathrm{R}\cos\alpha \\ \quad + (b'+ac'-b-a'c)\mathrm{R}\sin\alpha\sqrt{-1} + bc' + cb'\end{array}\right]}{\mathrm{R}^2 + (c+c')\mathrm{R}\cos\alpha + \sqrt{-1}(c'-c)\mathrm{R}\sin\alpha + cc'},$$

$$2y\sqrt{-1} = \frac{\left[\begin{array}{l}(a-a')\mathrm{R}^2 + (b-a'c+ac'-b')\mathrm{R}\cos\alpha \\ \quad + (ac'-b'-b+ac')\mathrm{R}\sin\alpha\sqrt{-1} + bc' - cb'\end{array}\right]}{\mathrm{R}^2 + (c+c')\mathrm{R}\cos\alpha + \sqrt{-1}(c'-c)\mathrm{R}\sin\alpha + cc'},$$

en posant

$$\mathrm{R} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right).$$

Pour que le problème ait une solution, il faut que les valeurs de x et y soient réelles.

Pour que x soit réel, il faut les conditions

$$c = c', \qquad b' + ac' - b - a'c = 0.$$

Pour que y soit réel, il faut avoir

$$a = a', \qquad b - a'c + a'c - b' = 0, \qquad bc' - cb' = 0.$$

Ces diverses conditions se réduisent à

$$a = a', \qquad b = b', \qquad c = c'.$$

Les formules précédemment obtenues se simplifient donc et deviennent

$$(8) \qquad u = \frac{ap+b}{p+c}, \qquad\qquad v = \frac{aq+b}{q+c},$$

$$(9) \qquad p = \frac{cu-b}{a-u}, \qquad\qquad q = \frac{cv-b}{a-v},$$

$$(10) \qquad x = \frac{a\mathrm{R}^2 + (b+ac)\mathrm{R}\cos\alpha + bc}{\mathrm{R}^2 + 2c\mathrm{R}\cos\alpha + c^2}, \qquad y = \frac{(ac-b)\mathrm{R}\sin\alpha}{\mathrm{R}^2 + 2c\mathrm{R}\cos\alpha + c^2}.$$

Les formules (10) pourront donc servir pratiquement à fixer sur la carte un point de la sphère connu par sa longitude et sa latitude et donnent la solution générale du problème que nous nous sommes posé.

Formons les équations qui représentent sur la carte les parallèles et les méridiens de la sphère, c'est-à-dire son canevas géographique.

Nous obtiendrons l'équation des parallèles sur la carte en multipliant l'une par l'autre les relations (9)

$$\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = \frac{(cu - b)(cv - b)}{(a - u)(a - v)}$$

ou

$$(11) \qquad \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = \frac{(cx - b)^2 + c^2 y^2}{(x - a)^2 + y^2}.$$

Nous obtiendrons l'équation des méridiens sur la carte, en divisant l'une par l'autre ces mêmes relations (9),

$$\frac{\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha}{\cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha} = \frac{(cu - b)(a - v)}{(cv - b)(a - u)}$$

ou

$$(12) \qquad c(x^2 + y^2) - (ac + b)x + (b - ac)y \cot\alpha - ab = 0.$$

Les équations (11) et (12), d'après la nature même de la question, représentent des cercles.

L'équation (11) montre que les divers cercles de latitude sont figurés par des cercles ayant leur centre sur une même droite, l'axe des x. Lorsque $\lambda = \frac{\pi}{2}$, l'équation du cercle représente un point figurant le pôle terrestre dont les coordonnées seront $x = \frac{b}{c}$, $y = 0$. Quand $\lambda = -\frac{\pi}{2}$, l'équation (11) donne un cercle réduit à un point $x = a$, $y = 0$, figurant l'autre pôle. Les centres des parallèles sur la carte se trouvent donc sur la droite joignant les points qui représentent les pôles terrestres.

Pour avoir l'équation de l'équateur, il suffira dans (11) de faire $\lambda = 0$, ce qui donne

$$(13) \qquad (1-c^2)(x^2+y^2)+2(bc-a)x+a^2-b^2=0.$$

Lorsque $c=1$, l'équateur se réduira à une droite.

Lorsque $c=0$, les parallèles sont figurés sur la carte par des cercles concentriques et le centre commun sera la représentation de l'un des pôles.

L'équation (12) des méridiens montre, ainsi qu'on pouvait le prévoir, que les cercles qui les représentent ont tous deux points communs, les pôles, et par conséquent leurs centres sur la perpendiculaire menée par le milieu de la ligne des pôles. Lorsque $c=0$, c'est-à-dire lorsque les parallèles forment des cercles concentriques, les méridiens forment sur la carte des droites issues de l'un des pôles.

Lagrange a montré que, dans tout système de cartes où les angles sont conservés en vraie grandeur, les coordonnées d'un point de la carte sont

$$(14) \qquad x=f(p)+f_1(q), \qquad y=\sqrt{-1}\,[f_1(q)-f(p)].$$

Or on peut déduire des équations (8)

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left(\frac{aq-b}{q-c}+\frac{ap+b}{p-c}\right), \\ y &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\left(\frac{aq-b}{q+c}-\frac{ap-b}{p-c}\right). \end{aligned} \right.$$

Ces formules rentrent dans la famille des précédentes. On peut donc dire que, lorsque tout cercle de la sphère est représenté par un cercle, les angles sont conservés.

On peut donner aux formules (10) une forme plus simple en prenant pour origine des coordonnées un point de l'axe des X, tel que le coefficient de R au numérateur de x devienne nul. En posant $m = \frac{ac - b}{2c}$, on aura, dans ce cas,

$$(16)\qquad x = \frac{m(R^2 - c^2)}{R^2 - 2cR\cos\alpha + c^2}, \qquad y = \frac{2mcR\sin\alpha}{R^2 + 2cR\cos\alpha + c^2}.$$

On sait que la projection stéréographique jouit de la propriété qui fait l'objet de cette étude. Si l'on appelle l la latitude de l'extrémité du diamètre passant par le point de vue, les formules donnant la position d'un point sur la carte, ainsi qu'on peut le démontrer géométriquement par une recherche directe, seront

$$x = \frac{n}{\cos l}\,\frac{R^2(1 - \sin l) - (1 - \sin l)}{R^2(1 - \sin l) + 2R\cos l\cos\alpha + 1 + \sin l},$$

$$y = \frac{2nR\sin\alpha}{R^2(1 - \sin l) + 2R\cos l\cos\alpha + 1 - \sin l}.$$

Pour que ces formules soient identiques aux précédentes, il faut et il suffit que $m = \frac{n}{\cos l}$, $c = \frac{\cos l}{1 - \sin l}$; par conséquent à des valeurs quelconques de m et de c correspondront des valeurs bien déterminées de n et l.

Nous pouvons donc maintenant énoncer le théorème suivant :

Parmi tous les systèmes qui peuvent servir à représenter sur un plan les figures tracées sur une sphère, la projection stéréographique est le seul dans lequel un cercle quelconque de la sphère sera représenté par un cercle.