NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. GODEFROY

Sur le système d’une conique et d’un cercle

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 155-158

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__155_1>

SUR LE SYSTÈME D'UNE CONIQUE ET D'UN CERCLE;

PAR M. R. GODEFROY,
Élève de l'École Polytechnique.

Je me propose de démontrer un théorème de Géométrie sur le système d'une conique et d'un cercle donnant immédiatement comme conséquences particulières les formules fondamentales de la théorie du cercle osculateur dans les coniques.

Considérons une conique à centre : soit l'ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Les cordes communes à cette ellipse et au cercle $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R^2 = 0$ ont pour équation

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 + \lambda[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R^2] = 0,$$

où λ prend successivement l'une des valeurs tirées de l'équation

$$\begin{aligned}\lambda^3R^2 - \lambda^2(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2 - a^2R^2 - b^2R^2)\\ - \lambda a^2b^2(\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2 - R^2) + a^4b^4 = 0,\end{aligned}$$

exprimant que la conique passant aux intersections de l'ellipse et du cercle est un système de droites. Les distances de leurs points d'intersection au grand axe de l'ellipse sont données par

$$y = \frac{\beta\lambda}{a^2+\lambda}.$$

Soient y_1, y_2, y_3 les trois distances, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les paramètres correspondants : le produit des distances sera donné par la formule

$$y_1y_2y_3 = \frac{\beta^3\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)(a^2+\lambda_3)}.$$

Le numérateur

$$\beta^3\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

et le dénominateur

$$a^6 + a^4\Sigma\lambda_1 - a^2\Sigma\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

sont des fonctions symétriques données par l'équation du troisième degré en λ écrite plus haut; tous calculs faits, l'expression du produit se réduit simplement à

$$y_1y_2y_3 = -\frac{b^4\beta}{c^2},$$

de même

$$x_1 x_2 x_3 = \frac{a^4 \alpha}{c^2}.$$

On arrive donc à ce résultat d'une grande simplicité que le produit des distances à un axe des points d'intersection des lignes conjointes est à la distance correspondante du centre du cercle dans le rapport de la quatrième puissance de l'axe qui lui correspond au carré de la distance focale.

Il est à remarquer que ces expressions sont indépendantes de la grandeur du cercle.

Les coordonnées du centre du cercle osculateur en un point (x, y) d'une conique sont des cas particuliers de ces formules.

Imaginons que trois points d'intersection de la conique et du cercle viennent à coïncider : α, β seront alors les coordonnées du centre du cercle osculateur. Les trois points d'intersection des cordes communes viennent se confondre au triple point où le cercle rencontre la conique. On a alors pour α et β

$$\alpha = \frac{c^2 x^2}{a^4}, \qquad \beta = -\frac{c^2 y^3}{b^4},$$

formules connues par beaucoup d'autres méthodes.

Pour la parabole, nous agirons un peu différemment.

Les sécantes communes au cercle et à la courbe ont pour équation

$$y^2 - 2px + \lambda[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R^2] = 0.$$

λ est une des racines de l'équation

$$\begin{aligned}&\lambda^3(\alpha^2+\beta^2) + \lambda^2(R^2 - \beta^2 + 2p\alpha)\\ &\quad - \lambda(\alpha^2+\beta^2 - R^2 - 2p\alpha - p^2) + p^2 = 0.\end{aligned}$$

Pour avoir des expressions simples et indépendantes du rayon du cercle, prenons la somme des distances des points d'intersection des lignes conjointes à la tangente au sommet de la parabole.

On a alors

$$x_1 + x_2 + x_3 = \alpha - p,$$

et, en prenant comme précédemment le produit des distances à l'axe de la courbe,

$$y_1 y_2 y_3 = -\beta p^2.$$

On en déduit, pour les coordonnées du centre du cercle osculateur au point (x, y) de la parabole,

$$\alpha = 3x + p, \qquad \beta = -\frac{y^3}{p^2},$$

expressions connues.

De l'égalité $x_1 + x_2 + x_3 = \alpha - p$, on déduit :

Les triangles polaires conjugués à une parabole et à tous les cercles dont les centres sont sur une perpendiculaire à l'axe ont leurs centres de gravité également sur une perpendiculaire à l'axe.