

ÉMILE LEMOINE

Note sur le cercle des neuf points

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 5
(1886), p. 122-127

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__122_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1886, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LE CERCLE DES NEUF POINTS;

PAR M. ÉMILE LEMOINE,

Ancien élève de l'École Polytechnique.

Nous avons indiqué (voir *Comptes rendus du Congrès de Rouen, de l'Association française pour l'avancement des Sciences*, p. 126; 1883) la simplicité de certaines équations se rapportant aux propriétés des cercles tangents aux trois côtés d'un triangle, lorsque l'on exprimait les coefficients de ces équations en fonction des rayons de ces cercles, et, d'autre part, nous avons montré (voir *Congrès de Blois*, p. 49; 1884) l'utilité de considérer les points associés (¹): la présente Note en fournira de nouveaux exemples.

Nous nous rapportons aux élégantes constructions géométriques démontrées par M. Gérono (voir *Nouvelles Annales*, p. 220; 1865), pour les points de contact du cercle des neuf points avec les cercles tangents aux trois côtés du triangle, et nous adopterons ici les mêmes notations et les notations analogues que nous indiquons ici.

ABC le triangle considéré;

a, b, c , les milieux de BC, AC, AB;

(¹) Si α, β, γ sont les coordonnées homogènes d'un point O, les points associés O_a, O_b, O_c ont respectivement pour coordonnées $-\alpha, \beta, \gamma; \alpha, -\beta, \gamma; \alpha, \beta, -\gamma$.

a', b', c' les points de contact de BC, AC, AB avec le cercle inscrit;

a'_a, b'_a, c'_a les points de contact de BC, AC, AB avec le cercle exinscrit tangent au côté BC; de même a_b, b'_b, c'_b ; a_c, b'_c, c'_c ;

H, G, M les points d'intersection respectivement de $cb, c'b'$; de $ac, a'c'$; de $ab, a'b'$;

H_a, G_a, M_a les points d'intersection respectivement de $cb, c'_a b'_a$; de $ac, a'_a c'_a$; de $ab, a'_a b'_a$; de même H_b, G_b, M_b ; H_c, G_c, M_c .

Soient r, r_a, r_b, r_c les rayons des quatre cercles tangents aux trois côtés du triangle.

Les trois droites Ha', Gb', Mc' ont pour équations

$$\frac{a}{r_a}(r_b + r_c - 2r_a)\xi + \frac{b}{r_b}(r_b - r_c)\eta + \frac{c}{r_c}(r_c - r_b)\zeta = 0, \dots,$$

et se coupent en d' , point de contact du cercle inscrit et du cercle des neuf points.

Les coordonnées de d' sont

$$\frac{r_a}{a}(r_b - r_c)^2, \quad \frac{r_b}{b}(r_c - r_a)^2, \quad \frac{r_c}{c}(r_a - r_b)^2,$$

ou

$$\frac{p-a}{a}(b-c)^2, \quad \frac{p-b}{b}(c-a)^2, \quad \frac{p-c}{c}(a-b)^2.$$

Les trois droites $H_a a'_a, G_a b'_a, M_a c'_a$ ont respectivement pour équations

$$\frac{a}{r}(r_b + r_c + 2r)\xi + \frac{b}{r_c}(r_b - r_c)\eta + \frac{c}{r_b}(r_c - r_b)\zeta = 0,$$

$$\frac{a}{r}(r_b + r)\xi - \frac{b}{r_c}(2r_c + r - r_b)\eta + \frac{c}{r_b}(r_b + r)\zeta = 0,$$

$$\frac{a}{r}(r_c + r)\xi + \frac{b}{r_c}(r_c + r)\eta - \frac{c}{r_b}(2r_b + r - r_c)\zeta = 0,$$

et se coupent au point d'_a de contact du cercle des neuf

points et du cercle exinscrit tangent au côté BC et au prolongement des deux autres.

d'_a a pour coordonnées

$$-\frac{r}{a}(r_b - r_c)^2, \quad \frac{r_c}{b}(r + r_b)^2, \quad \frac{r_c}{c}(r + r_c)^2$$

ou

$$-\frac{p}{a}(b - c)^2, \quad \frac{p - c}{b}(a + c)^2, \quad \frac{p - b}{c}(a + b)^2.$$

H, G, M sont respectivement les *associés* du point situé à l'infini

$$\frac{b - c}{a}, \quad \frac{c - a}{b}, \quad \frac{a - b}{c},$$

et par conséquent AH, BG, CM sont parallèles.

De même, H_a, G_a, M_a sont les *associés* du point situé à l'infini

$$\frac{c - b}{a}, \quad -\frac{a - c}{b}, \quad \frac{a - b}{c},$$

et par suite AH_a, BG_a, CM_a sont parallèles.

$b'c'$ a pour équation

$$-\frac{a}{r_a}\xi + \frac{b}{r_b}\tau_1 + \frac{c}{r_c}\zeta = 0;$$

de même $d'c', d'b', \dots$

$b'_a c'_a, c'_a a'_a, a'_a b'_a$ ont respectivement pour équations

$$\frac{a}{r}\xi + \frac{b}{r_c}\tau_1 - \frac{c}{r_b}\zeta = 0,$$

$$\frac{a}{r}\xi + \frac{b}{r_c}\tau_1 - \frac{c}{r_b}\zeta = 0,$$

$$\frac{a}{r}\xi - \frac{b}{r_c}\tau_1 + \frac{c}{r_b}\zeta = 0.$$

Remarquons que nous avons désigné par a, b, c les milieux des côtés BC, ΔC , ΔB et aussi, dans les équations, par a, b, c comme à l'ordinaire les longueurs des

côtés BC, AC, AB, mais il ne peut évidemment résulter aucune amphibologie de ce double emploi de lettres.

Les trois droites $A d'_a, B d'_b, C d'_c$ se coupent au point λ qui a pour coordonnées

$$\frac{(b-c)^2}{a(p-a)}, \quad \frac{(a+c)^2}{b(p-b)}, \quad \frac{(a+b)^2}{c(p-c)}.$$

Les trois droites $A d'_a, B d'_c, C d'_b$ se coupent au point λ_a qui a pour coordonnées

$$-\frac{(b+c)^2}{ap}, \quad \frac{(c-a)^2}{b(p-c)}, \quad \frac{(a-b)^2}{c(p-b)}, \quad \dots$$

Les trois droites $A \lambda_a, B \lambda_b, C \lambda_c$ se coupent en d' .

Les trois droites $A \lambda, B \lambda_c, C \lambda_b$ se coupent en d'_a ; etc.

L'axe d'homologie de ABC et de $d'_a d'_b d'_c$ qui est aussi l'axe d'homologie de ABC et de $\lambda_a \lambda_b \lambda_c$ est la droite

$$\xi + \tau + \zeta = 0,$$

qui joint les pieds des bissectrices extérieures.

L'axe d'homologie de ABC et de $d' d'_c d'_b$ qui est aussi l'axe d'homologie de ABC et de $\lambda \lambda_c \lambda_b$ est la droite

$$\xi - \tau + \zeta = 0;$$

qui joint les pieds de deux bissectrices; etc.

L'équation de $d'_b d'_c$ est

$$a\xi[bc - \{p(p-a)\} + bc(b+c)(\tau + \zeta)] = 0,$$

l'équation de $d' d'_c$ est

$$(\xi - \tau)ab(a-b) - [ab - 4(p-a)(p-b)]\zeta = 0;$$

l'équation de $\lambda_b \lambda_c$ est

$$a(b+c)(p-b)(p-c)[4p(p-a) - bc]\xi \\ - p(p-a)bc(b-c)^2(\tau + \zeta) = 0;$$

etc.

Soient

- D le point où BM coupe AC;
 E le point où AM coupe BC;
 D_a le point où BM_a coupe AC;
 E_a le point où AM_a coupe BC.

DE passe en d' et y est la tangente commune au cercle inscrit et au cercle des neuf points; elle a pour équation

$$\frac{a}{b-c}\xi + \frac{b}{c-a}\eta + \frac{c}{a-b}\zeta = 0.$$

DE passe par les points $(b-c)^2$, $(c-a)^2$, $(a-b)^2$; $\frac{(b-c)^2}{a}$, $\frac{(c-a)^2}{b}$, $\frac{(a-b)^2}{c}$, et les coordonnées d'un quelconque de ses points peuvent s'exprimer par

$$\frac{(\delta-a)(b-c)^2}{a}, \quad \frac{(\delta-b)(c-a)^2}{b}, \quad \frac{(\delta-c)(a-b)^2}{c},$$

δ variant avec le point.

D_aE_a passe par le point d'_a , y est la tangente commune au cercle exinscrit tangent à BC et au cercle des neuf points.

L'équation de D_aE_a est

$$\frac{a}{c-b}\xi - \frac{b}{a+c}\eta + \frac{c}{a+b}\zeta = 0.$$

Remarque. — Toutes les fois que, dans une équation ou dans l'expression des valeurs des coordonnées homogènes d'un point, etc., les quantités

$$p, \quad p-a, \quad p-b, \quad p-c$$

entreront d'une façon homogène, les égalités

$$pr - (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$$

prouvent que p , $p - a$, $p - b$, $p - c$ peuvent y être remplacés par $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r_a}$, $\frac{1}{r_b}$, $\frac{1}{r_c}$ et réciproquement.

L'identité $a = p - (p - a)$ montre alors que, dans toute formule, a , b , c peuvent être remplacés par

$$\varphi \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} \right), \quad \varphi \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_b} \right), \quad \varphi \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} \right),$$

φ disparaissant dans les expressions homogènes.

Application. — La formule

$$\cos \frac{1}{2} \Lambda = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

donne

$$\cos \frac{1}{2} \Lambda = \sqrt{\frac{\frac{1}{r} \frac{1}{r_a}}{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_b} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} \right)}}$$

ou

$$\cos \frac{1}{2} \Lambda = \sqrt{\frac{rr_b r_c}{r_a(r_b - r)(r_c - r)}} = \frac{S}{r_a \sqrt{(r_b - r)(r_c - r)}},$$

et ainsi de toute formule entre les éléments d'un triangle.