NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CESÀRO

Sur la série de Lambert

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 106-109

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__106_1>

SUR LA SÉRIE DE LAMBERT;

PAR M. E. CESARO.

1. D'après une formule connue, on peut écrire

$$(1)\qquad \frac{1}{p} + v_p = \frac{1}{2}\log\frac{p+1}{p-1},$$

où

$$(2)\qquad v_p = \frac{1}{3p^3} + \frac{1}{5p^5} + \frac{1}{7p^7} + \ldots < \frac{1}{6}\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1} - \frac{2}{p}\right).$$

Dans l'égalité (1), donnons successivement à p les valeurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$, et additionnons, après avoir posé

$$(3)\qquad \begin{cases} U_n = \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \ldots + \dfrac{1}{u_n}, \\ V_n = v_{u_1} + v_{u_2} + \ldots + v_{u_n}. \end{cases}$$

Il vient

$$(4)\qquad U_n + V_n = \frac{1}{2}\log\frac{(u_1+1)(u_2+1)\ldots(u_n+1)}{(u_1-1)(u_2-1)\ldots(u_n-1)}.$$

2. La formule (4) est susceptible de nombreuses applications. En particulier, on peut l'utiliser pour évaluer approximativement la somme des n premiers termes de la *série de Lambert*, c'est-à-dire

$$S_n = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \ldots + \frac{x^n}{1-x^n}.$$

x étant *compris entre* 0 *et* 1. Prenons, à cet effet,

$$u_p = \frac{1+x}{x^p}\,\frac{1-x^p}{1-x},$$

de sorte que

$$\frac{u_{p-1}-1}{u_p-1} = x, \quad U_n = \frac{1-x}{1+x}\,S_n.$$

La formule (4) devient

$$U_n + V_n = \frac{1}{2}\log\left(1 + 2x\,\frac{1-x^n}{1-x}\right). \tag{5}$$

3. On reconnaît sans peine, au moyen de l'inégalité (2), que, pour n indéfiniment croissant, V_n tend vers une limite *finie* V, supérieure à V_n. D'autre part, en vertu de la même inégalité, on a

$$\begin{aligned} V - V_n &< \frac{1}{6}\sum_{p=n+1}^{p=\infty}\left(\frac{1}{u_{p-1}-1} - \frac{1}{u_p-1} - \frac{2}{u_p}\right) \\ &< \frac{1}{6}\sum_{p=n+1}^{p=\infty}\left(\frac{x}{u_{p-1}} - \frac{1}{u_p}\right). \end{aligned}$$

ou bien

$$V - V_n < \frac{1}{6}\left[\frac{x}{u_n} - (1-x)(U - U_n)\right]. \tag{6}$$

Or, à cause de

$$u_p > \frac{1+x}{1-x}\,\frac{1}{x^p}, \qquad U - U_n = \sum_{p=n+1}^{p=\infty}\frac{1}{u_p},$$

on a

$$U - U_n > \frac{1-x}{1+x}\sum_{p=n+1}^{p=\infty} x^p = \frac{x^{n+1}}{1+x} = \frac{1-x^n}{1-x}\,\frac{x}{u_n}.$$

On peut donc, au lieu de (6), écrire, à plus forte raison,

$$V - V_n < \frac{x^{n+1}}{6u_n}, \quad V_n = V - \frac{\theta x^{n+1}}{6u_n},$$

θ étant une *fraction proprement dite.*

4. Par substitution dans (5), on trouve

$$\frac{1-x}{1+x} S_n = \frac{1}{2} \log\left(1+2x\frac{1-x^n}{1-x}\right) - \frac{\theta x^{n+1}}{6u_n} - V,$$

c'est-à-dire

$$(7)\quad \sum_{p=1}^{p=n} \frac{x^p}{1-x^p} = \frac{1+x}{1-x} \log\sqrt{\frac{1}{2}+x\frac{1-x^n}{1-x}} + \frac{\theta x^{2n+1}}{6(1-x^n)} + \text{const.}$$

Par *constante* nous entendons une fonction de x, *indépendante de n*. Pour n infini, on obtient

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{x^p}{1-x^p} = \frac{1+x}{1-x} \log\sqrt{\frac{1}{2}\,\frac{1+x}{1-x}} + \text{const.},$$

ce qui nous donne l'interprétation de la *constante*. D'après cela, l'égalité (7) peut prendre cette autre forme

$$(8)\quad \sum_{p=n+1}^{p=\infty} \frac{x^p}{1-x^p} = \frac{1+x}{1-x} \log\sqrt{\frac{1+x}{1+x-2x^{n+1}}} + \frac{\theta x^{2n+1}}{6(1-x^n)}.$$

5. Si, après avoir multiplié par $1-x$ les membres de (7), on fait $x=1$, on trouve la formule connue

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} = C+\log\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{\theta}{6n}.$$

D'ailleurs, l'application *directe* de la formule (4) à l'évaluation de la somme des n premiers termes de la *série harmonique* permet d'obtenir des expressions beaucoup plus approchées. Si l'on fait, par exemple, $u_p = p+1$, en ne considérant que $n-1$ termes dans les séries (3), on trouve

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} = C+\log\sqrt{n(n+1)}+\frac{\theta}{6n(n+1)}.$$

6. Pour une valeur *donnée* de x, on peut toujours

trouver la somme de la *série de Lambert*, avec une approximation aussi grande qu'on le désire, en faisant usage de la formule (8), dans laquelle on attribue à n une valeur suffisamment grande. Proposons-nous, par exemple, de calculer la somme

$$S = \frac{1}{10-1} + \frac{1}{10^2-1} + \frac{1}{10^3-1} + \frac{1}{10^4-1} + \ldots,$$

avec *sept* décimales exactes. Il suffit de prendre $n = 3$ dans (8), après quoi il vient

$$S = \frac{1}{9} + \frac{1}{99} + \frac{1}{999} + \frac{11}{18} \log \frac{5500}{5499} = 0,1223242\ldots$$

Cet exemple admet une vérification facile. Le $n^{\text{ième}}$ chiffre décimal doit, en effet, représenter le *nombre des diviseurs de n* pour les *quarante-six* premières valeurs de n.