ERNEST JAGGI

Sur les complexes de droites du premier degré et sur leurs congruences

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 80-87

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__80_1>

SUR LES COMPLEXES DE DROITES DU PREMIER DEGRÉ ET SUR LEURS CONGRUENCES;

PAR M. ERNEST JAGGI,
Étudiant à la Faculté des Sciences de Besançon.

1. La définition donnée par Plücker des complexes du premier degré est la suivante :

« L'ensemble des droites dont les six coordonnées homogènes satisfont à une équation homogène et du premier degré constitue un complexe de droites du premier degré. »

Je me propose de transformer cette définition analytique en une définition géométrique et de tirer de cette dernière des conséquences géométriques.

A l'aide de la définition analytique précédente, on démontre successivement les propriétés suivantes :

THÉORÈME I. — *Il y a une infinité de droites du* *complexe qui passent par tout point de l'espace, et ces droites sont dans un même plan appelé* plan focal *du point donné.*

Théorème II. — *Dans tout plan de l'espace, il y a une infinité de droites du complexe, et ces droites passent toutes par un même point du plan qu'on appelle le* foyer *du plan donné.*

Théorème III. — *Le lieu du foyer d'un plan mobile passant par une droite* D *est une seconde droite* Δ; *lorsque* D *ne fait pas partie du complexe,* Δ *n'est pas dans un même plan avec* D; *lorsque* D *fait partie du complexe,* Δ *coïncide avec* D.

Réciproquement, tout plan passant par la droite Δ précédemment définie a son foyer sur D; en sorte que les deux droites D et Δ, jouissant de propriétés réciproques, peuvent être appelées *droites conjuguées.*

Théorème IV. — *Toute droite qui fait partie du complexe et s'appuie sur une droite* D *s'appuie aussi sur la droite* Δ *conjuguée de* D, *et toute droite qui s'appuie à la fois sur deux droites conjuguées* D *et* Δ *fait partie du complexe.*

Les théorèmes qui précèdent permettent de construire géométriquement le foyer d'un plan donné et le plan focal d'un point donné connaissant deux couples de droites conjuguées (D, Δ) et (D′, Δ'). Je rappelle ces constructions, qui résultent du théorème suivant :

Théorème V. — *Les pieds de deux droites conjuguées sur un plan sont en ligne droite avec le foyer du plan.*

1° *Le foyer d'un plan sera déterminé comme point commun aux deux droites joignant les pieds de* D *et de* Δ, *de* D′ *et de* Δ' *sur le plan donné;*

2° *Le plan focal d'un point sera déterminé par le point donné et par la droite joignant les foyers de deux plans quelconques passant par le point.*

Ces constructions montrent qu'un complexe linéaire est complètement déterminé quand on connaît deux couples de droites conjuguées. Or, on démontre encore le théorème suivant :

THÉORÈME VI. — *Deux couples de droites conjuguées* (D, Δ) *et* (D', Δ') *sont quatre génératrices d'un même mode de génération d'un hyperboloïde dont le second mode est formé par des droites du complexe;* et l'on en déduit immédiatement le théorème suivant :

THÉORÈME VII. — *Cinq droites du complexe déterminent géométriquement le complexe, car elles déterminent deux couples de droites conjuguées et, par suite, permettent de construire géométriquement le complexe.* (Ceci était intuitif, car l'équation du complexe dépend de cinq constantes, et ces cinq constantes sont déterminées par les cinq relations qui expriment que les cinq droites données font partie du complexe).

2. Considérons maintenant un système de droites défini ainsi qu'il suit et que je désignerai, pour abréger, par la lettre S.

(A) Par tout point de l'espace passent une infinité de droites du système et toutes ces droites sont dans un même plan, que nous appellerons *plan focal du point;* dans tout plan de l'espace existent une infinité de droites du système, et toutes ces droites passent par un même point que nous appellerons *foyer du plan.*

Je dis que le système de ces droites n'est autre qu'un complexe linéaire. En effet, de la définition géométrique précédente, on déduit que les théorèmes précédents sur les droites d'un complexe sont vrais aussi pour les droites du système S, car tous se tirent des théorèmes I et II.

On arrive donc à cette conclusion :

Cinq droites du système S déterminent ce système d'une seule manière, de même qu'elles déterminent un complexe et un seul.

Les plans focaux d'un point par rapport au système S et au complexe déterminés par cinq droites données coïncident et les foyers d'un plan par rapport au système S et au complexe coïncident.

Donc, *le système* S *et le complexe linéaire définis par cinq droites coïncident ;* en d'autres termes, tout système de droites qui répond à la définition géométrique (A) précédemment donnée est un complexe linéaire.

Applications. — 3. Considérons un corps solide mobile dans l'espace et dont le déplacement soit assujetti à cinq conditions ; on sait que les divers points de ce solide décrivent des courbes trajectoires. On sait aussi, d'après les Mémoires de Chasles, de M. Charles Brisse et de M. Mannheim, qu'à chaque instant les normales aux trajectoires des points d'un plan qui sont dans ce plan passent par un point fixe du plan ; d'ailleurs les normales à la trajectoire d'un point, en un point de cette trajectoire, sont dans le plan normal à la trajectoire en ce point. Donc, d'après ce qui précède :

Théorème I. — *Les normales aux trajectoires d'un solide de forme invariable dont le déplacement est assujetti à cinq conditions forment à chaque instant un complexe linéaire.*

On déduit facilement de là toutes les propriétés géométriques du déplacement infiniment petit du solide.

4. Considérons un solide mobile dans l'espace dont le déplacement soit assujetti à quatre conditions ; on sait que, dans ce cas, les divers points du solide décrivent en général des surfaces trajectoires. Or, ajoutons une cinquième condition arbitraire aux quatre conditions données pour le déplacement : les points du solide décriront des courbes trajectoires sur les surfaces précédentes, et à chaque instant les normales relatives à ce déplacement formeront un complexe linéaire; parmi ces normales, seront les normales aux surfaces trajectoires en tous les points du solide. Changeons la cinquième condition que nous avions ajoutée : les courbes trajectoires changent sur les surfaces trajectoires, et les normales relatives au déplacement correspondant forment un nouveau complexe linéaire.

Ainsi, à un instant donné, les normales aux surfaces trajectoires en tous les points du solide appartiennent à deux complexes linéaires; par conséquent :

Théorème II. — *A chaque instant, les normales en tous les points d'un solide assujetti à quatre conditions, à leurs surfaces trajectoires, forment une congruence de complexes linéaires.*

On peut déduire immédiatement de là toutes les propriétés géométriques du déplacement infiniment petit : par exemple, ce théorème fondamental démontré par M. Mannheim :

Les normales aux surfaces trajectoires des points d'une figure de forme invariable dont le déplacement est assujetti à quatre conditions rencontrent toutes deux mêmes droites (directrices de la congruence).

Les surfaces focales de la congruence trouvent facilement aussi leur application, mais je ne veux faire ici qu'indiquer les moyens d'appliquer les complexes et les congruences linéaires.

5. Les réciproques des deux théorèmes I et II sur les normales relatives aux déplacements d'un solide assujetti à cinq ou à quatre conditions sont faciles à démontrer.

Je dis d'abord que tout complexe linéaire peut être considéré comme formé par les normales aux courbes trajectoires d'un solide de forme invariable dont le déplacement est assujetti à cinq conditions. En effet, prenons cinq droites du complexe et cinq arcs élémentaires de courbe normaux respectivement à chacune de ces droites en des points quelconques, ces arcs étant, en outre, normaux aux plans focaux des points choisis. Ces cinq trajectoires définissent le déplacement infiniment petit du solide; le complexe des normales relatif à ce déplacement coïncide avec le complexe donné, car cinq droites déterminent d'une seule manière un complexe linéaire.

Je dis maintenant que toute congruence de complexes linéaires peut être considérée comme composée des normales à un instant donné aux surfaces trajectoires des points d'un solide soumis à quatre conditions. En effet, chaque complexe linéaire auquel appartiennent les droites de la congruence peut être considéré comme composé des normales aux courbes trajectoires décrites par le solide dont le déplacement infiniment petit serait soumis aux quatre conditions précédentes et à une cinquième condition arbitraire.

6. Comme dernière application, je me propose d'expliquer géométriquement l'analogie constatée par M. Appell, qui existe entre le système des pôles et plans po-

laires dans une cubique gauche et le système des foyers et plans focaux dans le déplacement infiniment petit hélicoïdal (c'est-à-dire assujetti à cinq conditions). Nous savons que les normales aux trajectoires des divers points d'un solide assujetti à un déplacement hélicoïdal forment un complexe linéaire.

Or les droites, appelées *droites conjuguées d'elles-mêmes* par M. Appell, dans sa thèse, sont telles que toutes celles, qui passent par un point de l'espace, sont dans le plan polaire du point, et toutes celles, qui sont dans un plan, passent par le pôle du plan (*voir* la thèse de M. Appell, Ire Partie). Elles forment donc un complexe linéaire (définition géométrique du complexe linéaire) : de là l'analogie indiquée.

Dans la seconde Partie de sa thèse, M. Appell démontre par l'analyse qu'il existe toujours un déplacement hélicoïdal et un seul dont le système des foyers et plans focaux est identique au système des pôles et plans polaires dans une cubique donnée ; ceci est évident géométriquement d'après ce qui précède, car cinq droites conjuguées d'elles-mêmes par rapport à la cubique déterminent un complexe linéaire d'une seule manière, et tout complexe linéaire répond à un déplacement hélicoïdal infiniment petit et à un seul.

La réciproque, démontrée analytiquement par M. Appell, se démontre géométriquement de la manière suivante :

Les normales relatives à un déplacement hélicoïdal infiniment petit forment un complexe linéaire. Or cinq droites arbitraires, que nous pouvons d'ailleurs prendre parmi les droites du complexe précédent, peuvent toujours être considérées comme cinq droites conjuguées d'elles-mêmes par rapport à une certaine cubique (*voir* la thèse de M. Appell, Ire Partie), et alors le système des pôles et plans polaires de cette cubique coïncide avec le système des foyers et plans focaux du déplacement hélicoïdal, puisqu'un complexe linéaire est déterminé d'une seule manière par cinq droites. Si l'on déplace la cubique trouvée parallèlement à son axe et qu'on la fasse tourner autour de cet axe d'une façon quelconque, le système de ses pôles et plans polaires ne change pas; par conséquent,

Il existe une infinité de cubiques gauches, égales et ayant même axe, dont le système des pôles et plans polaires est identique au système des foyers et plans focaux d'un déplacement hélicoïdal infiniment petit donné.

Il n'y a d'ailleurs pas d'autres cubiques que les précédentes répondant à la question, car deux cubiques, qui ne sont pas égales ou qui n'ont pas même axe, n'ont pas le même système de pôles et plans polaires.