NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. LAGUERRE

Sur les anticaustiques par réfraction de la parabole, les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 5-16

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__5_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

SUR LES ANTICAUSTIQUES PAR RÉFRACTION DE LA PARABOLE, LES RAYONS INCIDENTS ÉTANT PERPENDICULAIRES A L'AXE;

PAR M. E. LAGUERRE.

I.

1. L'hypercycle est la transformée, par semi-droites réciproques, de la parabole; c'est une courbe de direction de la quatrième classe et dont l'équation la plus générale, en coordonnées tangentielles et les axes étant rectangulaires, est de la forme

$$(\alpha u + \beta v + \gamma)^2(u^2 + v^2)$$
$$= (A u^2 + 2B uv + C v^2 + 2D u + 2E v)^2.$$

Ses propriétés les plus importantes sont les suivantes :

1° Les tangentes à la courbe peuvent être associées deux par deux, de telle sorte que deux tangentes conjuguées quelconques et deux semi-droites fixes (les semi-droites fondamentales de la courbe) forment un système harmonique (1).

---

(1) Deux couples de semi-droites forment un système harmonique, quand elles touchent un même cycle et que leurs points de contact partagent harmoniquement la circonférence.

Sur les propriétés mentionnées dans le texte, voir mon Mémoire sur les hypercycles (*Comptes rendus,* mars et avril 1882); dans toute la suite de cette Note, les renvois à ce Mémoire seront simplement indiqués par la lettre H.

2° L'enveloppe des conjuguées d'une semi-droite D, par rapport à tous les couples de tangentes conjuguées, est un cycle K que j'appellerai le cycle polaire de D.

Il est clair qu'un hypercycle est entièrement déterminé quand on se donne les semi-droites fondamentales, une droite quelconque du plan et son cycle polaire.

3° Le cycle polaire d'une tangente touche cette tangente en son point de contact avec la courbe.

4° En désignant par A, A′ et B, B′ deux couples quelconques de tangentes conjuguées, si l'on considère une tangente mobile quelconque T et si l'on construit les cycles inscrits dans les triangles AA′T et BB′T, la longueur comprise sur T entre les points de contact est constante en grandeur et en ligne (¹).

2. Je rappellerai encore cette proposition importante :

A, B, C et D désignant les quatre tangentes communes à un cycle et à un hypercycle, si l'on considère les tangentes conjuguées C′ et D′ de deux quelconques d'entre elles C et D, les semi-droites A, B, C′ et D′ touchent un même cycle.

En voici quelques conséquences : étant prises arbitrairement cinq semi-droites P, Q, A, B, C du plan, il existe un hypercycle généralement bien déterminé pour lequel P et Q sont les semi-droites fondamentales et qui touche A, B, C.

Soient D la quatrième tangente que cette courbe a en commun avec le cycle inscrit dans le triangle ABC, et A′, B′, C′, D′ les conjuguées harmoniques de A, B, C, D relativement à P et à Q; il résulte de la proposition précédente que les semi-droites A, B, C′, D′ touchent un

(¹) H, N° 14

même cycle et il en est de même des semi-droites A, B', C, D' et des semi-droites A', B, C, D'.

Les cycles inscrits dans les triangles ABC', AB'C et A'BC touchent donc tous les trois la semi-droite D'; ce qui permet de déterminer la quatrième tangente commune D.

3. On peut encore énoncer la proposition suivante :

Si l'on désigne par (A, A'), (B, B'), (C, C') *trois couples de semi-droites formant une involution, les cycles inscrits dans les triangles* ABC', AB'C *et* A'BC *touchent une même semi-droite.*

Supposons, en particulier, que les semi-droites doubles de l'involution soient les droites isotropes passant par un point O du plan, deux semi-droites conjuguées sont alors symétriques par rapport au point O; d'où cette conclusion :

Si (A, A'), (B, B') *et* (C, C') *sont trois couples de semi-droites symétriques par rapport à un point* O *du plan, les cycles inscrits dans les triangles* ABC', AB'C *et* A'BC *touchent une même semi-droite.*

Le même théorème aurait encore lieu si la symétrie des couples avait lieu par rapport à une droite quelconque du plan.

II.

4. Une parabole peut être considérée comme un hypercycle et comme une courbe double; en chacun de ses points on peut mener deux tangentes qui sont des semi-droites opposées. Ses semi-droites fondamentales sont les semi-droites opposées déterminées par l'axe de la courbe; il en résulte que deux tangentes conjuguées sont *symétriques* par rapport à l'axe.

Toutes les propriétés des hypercycles appartiennent donc à la parabole et constituent des propriétés nouvelles de cette courbe.

5. Transformons une parabole par semi-droites réciproques en prenant pour axe de transformation l'axe de la courbe elle-même ; il est clair que les semi-droites fondamentales de la transformée seront encore les semi-droites opposées déterminées par l'axe et que les tangentes conjuguées seront symétriques par rapport à cet axe.

Réciproquement tout hypercycle jouissant de la propriété, que deux tangentes conjuguées sont symétriques par rapport à une droite D, est la transformée d'une parabole P ayant cette droite pour axe ; l'axe de transformation est également D.

Un point quelconque M de la parabole a pour transformé un cycle K dont le centre décrit une parabole P′ ayant pour axe D, tandis que son rayon varie proportionnellement à sa distance à l'axe ; la transformée est donc une des anticaustiques par réfraction de la parabole P′, lorsque les rayons incidents sont perpendiculaires à l'axe.

Je la désignerai sous le nom d'*anticaustique principale*.

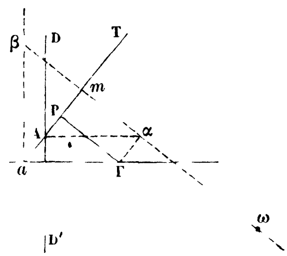
6. Ainsi les anticaustiques principales sont les hypercycles pour lesquels les semi-droites fondamentales sont opposées.

Considérons une telle courbe et soit F le point où une tangente isotrope coupe son axe, la tangente symétrique étant la seconde droite isotrope qui passe par ce point, on voit que F est le foyer de la courbe et que les droites isotropes, qui se croisent en ce point, forment un couple de tangentes conjuguées.

Menons une tangente parallèle à une direction perpendiculaire à l'axe, sa symétrique lui est opposée; nous avons donc une tangente double apparente perpendiculaire à l'axe, et les deux semi-droites opposées qu'elle détermine constituent également un couple de tangentes conjuguées.

Soient (*fig.* 1) une anticaustique principale ayant F pour foyer et DD′ comme tangente double, AT une tan-

Fig. 1.



gente quelconque à cette courbe. Les deux droites opposées DD′ et D′D formant un système de tangentes conjuguées, on voit que le cycle qui touche ces tangentes et la tangente AT se réduit au point A où cette tangente coupe DD′; son point de contact avec ce cycle est également le point A. D'autre part, le cycle qui touche les droites isotropes issues du point F et la tangente AT est le cycle qui a pour centre F; son point de contact avec AT est donc le pied P de la perpendiculaire abaissée du point F.

D'une proposition fondamentale énoncée plus haut, il résulte d'ailleurs, puisque les droites isotropes issues du point F constituent un système de tangentes conjuguées, que *la distance* AP *est constante en grandeur et en signe;* ainsi :

Toute anticaustique principale peut être considérée *comme l'enveloppe d'un des petits côtés d'un triangle rectangle de forme invariable dont l'extrémité, située sur l'hypoténuse, décrit une droite, tandis que l'autre petit côté passe par un point fixe.*

Les autres anticaustiques étant des courbes parallèles à l'anticaustique principale, on peut énoncer encore la proposition suivante :

Soit ABCD *un quadrilatère de forme invariable, dans lequel les deux angles* B *et* C *sont droits ; si l'on déplace ce quadrilatère de façon que le côté* BC *passe par un point fixe* F *et que le sommet* A *décrive une droite* Δ, *le côté* CD *enveloppe une anticaustique d'une parabole ayant pour foyer le point* F, *les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe.*

7. La proposition que je viens de démontrer peut s'énoncer ainsi :

Si, du foyer d'une anticaustique principale, on abaisse une perpendiculaire à une tangente à cette courbe, la distance Δ, comprise entre le pied de cette perpendiculaire et le point où la tangente rencontre la tangente double, est constante.

Plusieurs cas particuliers sont à remarquer : dans le cas où $\Delta = 0$, la courbe se réduit à une parabole ; quand la tangente double passe par le foyer, la courbe a alors le foyer pour centre.

Enfin, quand Δ est égal à la distance du foyer à la tangente double (c'est le cas de la *réflexion*), la classe de la courbe s'abaisse et elle devient un *hypercycle cubique*, ou plus exactement elle se décompose en un hypercycle cubique et un semi-point situé à l'infini sur la perpendiculaire abaissée du foyer sur la tangente double.

De là une propriété nouvelle de l'hypercycle cubique, que l'on peut énoncer ainsi :

Si des rayons, menés parallèlement à une direction quelconque, se réfléchissent sur une parabole, parmi toutes les anticaustiques correspondantes, il y en a une qui a un axe de symétrie; si, du foyer de la parabole, on mène une perpendiculaire à une tangente quelconque à cette courbe, la distance, comprise entre le pied de cette perpendiculaire et le point où la tangente rencontre la tangente double est constante et égale à la distance du foyer à cette tangente double.

8. Soit une anticaustique principale ayant pour foyer le point F et pour tangente double la droite DD'.

Considérons (*fig.* 1) une tangente AT à cette courbe et construisons le cycle polaire de cette semi-droite; nous savons qu'il lui est tangent. Il touche également la conjuguée harmonique de AT relativement aux deux tangentes opposées DD' et D'D, qui constituent un couple de tangentes conjuguées; le centre de ce cycle est donc sur la droite menée par le point A perpendiculairement à DD'. Ce cycle touche la conjuguée harmonique de AT relativement aux deux droites isotropes issues du point F (ces droites forment en effet un couple de tangentes conjuguées); et, comme cette conjuguée est la symétrique de AT relativement au point F, le centre cherché est sur la droite menée par le point F parallèlement à AT.

Ce centre est donc le point α et, le cycle polaire d'une tangente touchant cette semi-droite en son point de contact avec la courbe, on voit que le point de contact de AT est le pied m de la perpendiculaire abaissée du point α.

On serait arrivé à ce résultat en considérant l'anticaustique comme l'enveloppe du côté d'un triangle rectangle de forme invariable dont un sommet A décrit la droite DD′ pendant que le côté PF passe par le point fixe F; il est clair, en effet, que le centre instantané de rotation de la figure est le point α que j'ai déterminé précédemment.

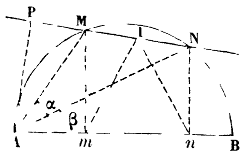
Pour construire le centre de courbure correspondant au point m (¹), je remarque que, la tangente conjuguée de AT étant la symétrique relativement à l'axe de la courbe, le cycle, qui touche l'anticaustique au point m et la conjuguée de AT, a son centre au point de rencontre de la normale $m\alpha$ avec la droite, menée parallèlement à DD′, par le point a où la tangente AT rencontre l'axe.

En désignant par β ce point de rencontre, il résulte d'un théorème, que j'ai donné dans mon Mémoire sur les hypercycles, que le centre de courbure cherché est le point ω symétrique de β par rapport à α.

III.

9. Une anticaustique principale étant donnée, il im-

Fig. 2.



porte de construire la parabole sur laquelle se sont refractés les rayons.

Pour la solution de cette question, je démontrerai

(¹) *Voir* II, nº 14.

d'abord quelques lemmes préliminaires. Un cercle étant décrit sur un segment AB comme diamètre (*fig.* 2), soient m et n les projections sur ce diamètre de deux points M et N de la courbe, et P la projection sur la droite MN de l'extrémité A du diamètre; cela posé :

Lemme I. — On a l'égalité

$$\frac{\overline{PN}^2}{\overline{Pn}^2} = \frac{Bm}{Bn}.$$

Lemme II. — En désignant par I le milieu de la corde MN, on a

$$Im = In = IP;$$

en d'autres termes,

$$\overline{AP}^2 = Am.An.$$

10. Pour les démontrer, je remarque que l'angle APM étant droit, l'angle $\widehat{PAN}$ est égal à l'angle $\widehat{MAB}$; faisons, pour un instant,

$$\widehat{MAB} = \alpha,\quad \widehat{NAB} = \beta.$$

Les deux triangles PAN et NAn donnent

$$\frac{\overline{PN}^2}{\overline{Nn}^2} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} = \frac{\overline{Mm}^2.\overline{AN}^2}{\overline{AM}^2.\overline{Nn}^2} = \frac{Am.Bm.An.AB}{Am.AB.An.Bn} = \frac{Bm}{Bn}.$$

En second lieu, le triangle APN donne

$$\overline{AP}^2 = \overline{AN}^2.\cos^2\alpha = \frac{\overline{AN}^2.\overline{Am}^2}{\overline{AM}^2} = \frac{An.AB.Am^2}{Am.AB} = Am.An.$$

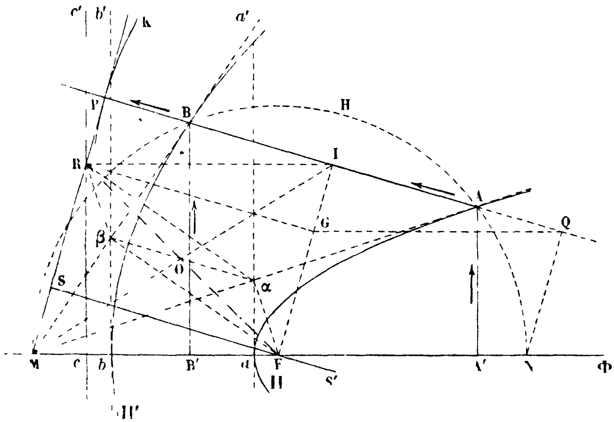
C. Q. F. D.

11. Considérons maintenant deux paraboles Π et Π′ (*fig.* 3) ayant le point F pour foyer et pour sommets respectifs les deux points a et b de la droite FΦ.

Par un point quelconque M de cette droite, menons une tangente à chacune des paraboles et soient respectivement A et B leurs points de contact; on sait que le cercle, ayant pour centre le foyer F et passant par le point M, contient les points A et B; j'appellerai N le point où il rencontre de nouveau l'axe FΦ.

Du point M abaissons une perpendiculaire MP sur la droite AB, et, par le point I milieu du segment AB, me-

Fig. 3.



nons une parallèle à l'axe qui rencontre MP au point R, il est clair que la figure MRIF est un parallélogramme.

Soient maintenant α et β les milieux respectifs des segments MA et MB; la droite $\alpha\beta$ est évidemment parallèle à AB et partagée en parties égales par la droite MI en son point milieu O; d'où il suit que la figure RβFα est un parallélogramme.

Ainsi les segments Rβ et αF sont égaux et parallèles, c, b et a étant les pieds des perpendiculaires abaissées sur l'axe des points R, β et α; on a donc

$$Fc = Fa + Fb;$$

d'où il résulte que Fc est constant et que, quand le point M varie, le point R décrit la droite cc'.

J'abaisse maintenant du point F la perpendiculaire FS sur la droite MP, du point R la perpendiculaire RG sur la droite FI et du point N la perpendiculaire NQ sur la droite AB; il est clair que RS est égal à FG, et encore a NQ, car il est aisé de voir que la figure GQFN est un parallélogramme.

Or, en désignant par A′ et B′ les pieds des perpendiculaires abaissées sur l'axe des points A et B, il suit du lemme II que l'on a

$$\overline{NQ}^2 = \overline{RS}^2 = NA'.NB' = \frac{Fa.Fb}{4}.$$

D'où il suit que la longueur RS est constante lorsque le point M se déplace; nous avons ainsi un triangle rectangle RSF dont un petit côté passe constamment par le point F, tandis que l'autre petit côté est constant et que le sommet R décrit la droite cc'.

Il en résulte donc, d'après ce que j'ai démontré plus haut, que RS enveloppe une anticaustique principale de parabole; le centre instantané de rotation étant d'ailleurs évidemment le point I, la tangente RS touche son enveloppe au point P.

12. Soit K l'hypercycle symétrique enveloppé par RS; si, du point A comme centre, on décrit un cercle ayant AP pour rayon, il est clair que son enveloppe est la courbe K; or, il résulte du lemme I que l'on a

$$\frac{AP}{NA} = \sqrt{\frac{NB'}{NA'}} = \sqrt{\frac{Fb}{Fa}}.$$

D'où il suit que ce rapport est constant et que K est l'anticaustique principale de la parabole Π, les rayons incidents étant perpendiculaire à l'axe et le module de réfraction étant

$$\sqrt{\frac{Fb}{Fa}}.$$

On démontrerait de même que K est l'anticaustique principale de la parabole H', les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe et le module de réfraction étant

$$\sqrt{\frac{Fa}{Fb}}.$$

13. Il est maintenant facile de résoudre le problème suivant :

Un hypercycle K est l'enveloppe du côté RS d'un triangle rectangle RSS', dont le côté SS' passe constamment par le point fixe F (*fig.* 3), dont le côté RS a une longueur constante et dont le sommet R décrit la droite cc'; trouver les paraboles pour lesquelles cette courbe est une anticaustique principale.

A cet effet, que du point F on abaisse une perpendiculaire à cc' rencontrant le côté RS en M, et que de ce même point comme centre on décrive un cercle H passant par M; que l'on détermine le point de rencontre I de la droite menée par F perpendiculairement à SS' et de la droite menée par R perpendiculairement à cc', puis que par I on mène une droite Δ parallèle à SS'. Cela posé, si l'on imagine les deux paraboles qui, ayant F pour foyer et ayant leur axe perpendiculaire à cc', passent respectivement par les points de rencontre de Δ et du cercle H, on obtiendra les deux paraboles pour lesquelles K est une anticaustique principale.

Il est à remarquer que ces deux paraboles ne sont pas toujours réelles; elles seront imaginaires si la droite Δ et le cercle H ne se rencontrent pas.