NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CESÀRO

Notes sur le calcul isobarique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 59-78

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__59_1>

NOTES SUR LE CALCUL ISOBARIQUE;

PAR M. E. CESARO.

I. — ALGORITHMES D'ALGORITHMES.

1. Sur un algorithme de *poids variable* r, de *degré constant* μ, répétons l'opération algorithmique $\underset{p}{\overset{m}{\mathrm{S}}}$. Un terme quelconque du résultat

$$\underset{r_1}{\overset{\mu}{\mathrm{S}}}\underset{r_2}{\overset{\mu}{\mathrm{S}}}\underset{r_3}{\overset{\mu}{\mathrm{S}}}\cdots\underset{r_m}{\overset{\mu}{\mathrm{S}}}, \quad (r_1+r_2+r_3+\ldots+r_m=p)$$

se compose d'une série de termes, dont chacun est constitué par μm facteurs dont les indices ont pour somme $r_1+r_2+\ldots+r_m=p$. Tout terme du résultat appartient donc à $\underset{p}{\overset{\mu m}{\mathrm{S}}}$. Il est évident, d'ailleurs, que *tous* les termes de $\underset{p}{\overset{\mu m}{\mathrm{S}}}$ se trouvent, sans répétition, dans le résultat. Par l'emploi successif de ce raisonnement, on est autorisé à écrire

$$(1) \qquad \underset{p}{\overset{m}{\mathrm{S}}}\underset{r}{\overset{\mu}{\mathrm{S}}}\underset{r}{\overset{\mu'}{\mathrm{S}}}\underset{r}{\overset{\mu''}{\mathrm{S}}}\cdots = \underset{p}{\overset{m\mu\mu'\mu''\ldots}{\mathrm{S}}},$$

en convenant d'opérer *successivement* et *de droite à* *gauche*. En outre, on doit rappeler que, par convention,

$\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}} = 0$ lorsqu'on n'a pas $1 \overline{\overline{<}} m \overline{\overline{<}} p$.

2. En particulier, soit u une fonction quelconque de x, et considérons l'algorithme

$$\mathrm{U}_{p,m}(x) = \overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left(\frac{1}{r!}\,\frac{d^r u}{dx^r}\right),$$

étudié dans la Note *Dérivées des fonctions de fonctions*. On aura, en vertu de (1),

$$\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}(\mathrm{U}_{r,\mu}) = \mathrm{U}_{p,\mu m}.$$

Cette égalité permet de *généraliser* les expressions isobariques obtenues dans la Note citée. Ainsi nous avons trouvé

$$\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left(\frac{1}{r!}\right) = \frac{\Delta^m(0^p)}{p!}.$$

Nous aurons, plus généralement,

$$\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left[\frac{\Delta^{\mu}(0^r)}{r!}\right] = \frac{\Delta^{\mu m}(0^p)}{p!}.$$

Par exemple, pour $\mu = 2$,

$$\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left(\frac{2^r - 2}{r!}\right) = \frac{\Delta^{2m}(0^p)}{p!}.$$

3. De même, les égalités

$$\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left[\frac{1}{(r-1)!}\right] = \frac{m^{p-m}}{(p-m)!}, \quad \overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}(\mathrm{C}_{\alpha+r-1,\, r-1}) = \mathrm{C}_{m\alpha+p-1,\, p-m}$$

donnent

$$\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left[\frac{1}{(r-\mu)!}\right]=\frac{m^{p-\mu m}}{(p-\mu m)!},\quad \overset{m}{\underset{n}{\mathrm{S}}}(\mathrm{C}_{\mu\alpha+r-1\ r-\mu})=\mathrm{C}_{\mu m\alpha+p-1\ p-\mu m}.$$

4. Comme dernier exemple, l'égalité

$$\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{s_{p-m,\,p-1}}{(m+1)(m+2)\dots p},$$

dans laquelle $s_{m,p}$ représente la *somme des produits m à m des p premiers nombres entiers,* se généralise ainsi

$$\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left[\frac{s_{r-\mu,\,r-1}}{(\mu+1)(\mu+2)\dots r}\right]=\frac{s_{p-\mu m,\,p-1}}{(\mu m+1)(\mu m+2)\dots p}.$$

En particulier, pour $\mu=2$, on a

$$\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left[\frac{1}{r}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{r-1}\right)\right]=\frac{1}{2^m}\,\frac{s_{p-2m,\,p-1}}{(2m+1)(2m+2)\dots p};$$

. . . .

II. — Sur la dérivation des fonctions de fonctions.

5. Dans la même Note, nous avons montré que, si $y=\varphi(u)$, $u=\psi(x)$, on a

$$(2)\qquad \frac{y^{(p)}}{1.2.3\dots p}=\sum_{i=1}^{i=p}\left[\frac{\varphi^{(i)}(u)}{1.2.3\dots i}\,\mathrm{U}_{p,i}(x)\right].$$

Cette formule s'étend aisément au cas où y s'exprime en fonction de x, par l'intermédiaire d'un nombre *quelconque* de fonctions. Soit, par exemple,

$$y=\chi(u),\quad u=\varphi(v),\quad v=\psi(x),$$

et posons

$$\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m}\left[\frac{\varphi^{(r)}}{r!}\right] = \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m}\left(\frac{1}{r!}\,\frac{d^r u}{dv^r}\right) = \Phi_{p,m},$$

$$\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m}\left[\frac{\psi^{(r)}}{r!}\right] = \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m}\left(\frac{1}{r!}\,\frac{d^r v}{dx^r}\right) = \Psi_{p,m}.$$

Il est visible que

$$\frac{y^{(p)}}{p!} = \sum_{i=1}^{i=p}\Big[\frac{\chi^{(i)}}{i!}\,(\Phi_{i,i}\Psi_{p,i} + \Phi_{i+1,i}\Psi_{p,i+1}$$

$$+ \Phi_{i+2,i}\Psi_{p,i+2} + \ldots + \Phi_{p,i}\Psi_{p,p})\Big].$$

Cette relation nous sera fort utile dans d'autres recherches.

6. Ici, nous n'aurons besoin que de la formule (2), dans le cas particulier de $\varphi(x) = \frac{1}{x}$. Soit

$$u = 1 - c_1 x + c_2 x^2 - c_3 x^3 + \ldots = \frac{1}{1 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 - \gamma_3 x^3} + \ldots.$$

D'après (2), on a

$$(3) \qquad \gamma_p = \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{p}(c_r) - \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{p-1}(c_r) + \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{p-2}(c_r) - \ldots \pm \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{1}(c_r).$$

7. Supposons que

$$u = (1 - a_1 x)(1 - a_2 x)(1 - a_3 x)\ldots.$$

La formule (3) donne l'expression générale des coefficients γ, moyennant les *sommes c_r des produits r à r* des quantités *a*. Il est, parfois, utile de connaître l'expression des mêmes coefficients en fonction des *sommes s_r des $r^{\text{ièmes}}$ puissances* des mêmes quantités. Dans ce but, posons $\frac{1}{u} = e^v$, de sorte que

$$v = s_1 x + \frac{s_2}{2} x^2 - \frac{s_3}{3} x^3 + \ldots.$$

Dans le cas actuel, la formule (2) donne, pour $\varphi(x) = e^x$,

$$(4)\quad \gamma_p = \overset{1}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left(\frac{s_r}{r}\right) + \frac{1}{2!}\overset{2}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left(\frac{r}{s_r}\right) + \frac{1}{3!}\overset{3}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left(\frac{s_r}{r}\right) + \ldots + \frac{1}{p!}\overset{p}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left(\frac{s_r}{r}\right).$$

Les relations (3) et (4), qui nous seront utiles dans la suite, fournissent de nombreux théorèmes.

III. — Différences des fonctions.

8. On sait que

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^p = \sum_{i=0}^{i=\infty}\left[\overset{p}{\underset{p+i}{\mathrm{S}}}\left(\frac{1}{r!}\frac{d^r y}{dx^r}\right)\Delta x^i\right].$$

Or, il est évident que l'on peut écrire, plus généralement,

$$(5)\qquad \left(\frac{\Delta^m y}{\Delta x^m}\right)^p = \sum_{i=0}^{i=\infty}\left[\overset{p}{\underset{p+i}{\mathrm{S}}}\left(\frac{1}{r!}\frac{d^r}{dx^r}\frac{\Delta^{m-1} y}{\Delta x^{m-1}}\right)\Delta x^i\right].$$

Cette formule donne lieu à beaucoup d'égalités intéressantes; mais il est utile, pour l'appliquer, de connaître l'expression de $\Delta^m y$. La question est aisée à résoudre, et, d'ailleurs, le résultat est connu; mais, comme nous en aurons besoin ultérieurement, dans la recherche des *différences des fonctions de fonctions*, nous allons l'indiquer en quelques mots.

9. Par le théorème de Taylor, on a

$$\Delta y = \frac{y'}{1}\Delta x + \frac{y''}{1.2}\Delta x^2 + \frac{y'''}{1.2.3}\Delta x^3 + \ldots.$$

En partant de là, calculons, de proche en proche, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, ... Nous sommes conduits à poser

$$\Delta^m y = \frac{y^{(m)}}{m!}\delta_{0,m}\Delta x^m + \frac{y^{(m+1)}}{(m+1)!}\delta_{1,m}\Delta x^{m+1} + \frac{y^{(m+2)}}{(m+2)!}\delta_{2,m}\Delta x^{m+2} + \ldots,$$

les nombres δ étant *indépendants de la nature de* y. Pour les déterminer, faisons $y = x^{m+i}$, puis $x = 0$, $\Delta x = 1$. Il vient

$$\Delta^m(0^{m+i}) = \delta_{i,m}.$$

Conséquemment

$$(6) \qquad \frac{\Delta^m y}{\Delta x^m} = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{1}{(m+i)!}\,\Delta^m(0^{m+i})\,\Delta x^i.$$

10. Soit, par exemple, $y = e^x$, et posons $\Delta x = z$. La dernière formule devient

$$(7) \qquad \left(\frac{e^z - 1}{z}\right)^m = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{\Delta^m(0^{m+i})}{(m+i)!}\,z^i.$$

Par la comparaison de cette égalité avec (6), on voit que l'on peut toujours écrire *symboliquement*

$$\Delta^m y = (e^{y\Delta x} - 1)^m.$$

11. De même, pour $y = \sin x$, on trouve, en faisant $x = 0$, $\Delta x = z$,

$$(m\ pair) \qquad 2^m \sin^m\frac{z}{2}\sin\frac{mz}{2} = \sum_{i=0}^{i=\infty} (-1)^i\,\frac{\Delta^m(0^{m+2i+1})}{(m+2i+1)!}\,z^{m+2i+1},$$

$$(m\ impair) \qquad 2^m \sin^m\frac{z}{2}\cos\frac{mz}{2} = \sum_{i=0}^{i=\infty} (-1)^i\,\frac{\Delta^m(0^{m+2i})}{(m+2i)!}\,z^{m+2i};$$

tandis que la formule (5) donne

$$(8) \quad (m\ pair) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{mz}{2}\right)^p \\ &= \sum_{i=0}^{i=\infty} \left\{ z^{p+i} \mathop{\mathrm{S}}_{p+i}^{p} \left[\frac{\cos\dfrac{(r-1)\pi + (m-1)z}{2}}{r!} \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

$$(9) \quad (m\ impair) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(2\sin\frac{z}{2}\sin\frac{mz}{2}\right)^p \\ &= \sum_{i=0}^{i=\infty} \left\{ z^{p+i} \mathop{\mathrm{S}}_{p+i}^{p} \left[\frac{\sin\dfrac{(r-1)\pi + (m-1)z}{2}}{r!} \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

12. Revenons à la fonction $y = x^\varpi$, et employons la formule (6), en supposant $\Delta x = 1$. On obtient, sous forme *symbolique*,

$$\Delta^m(x^\varpi) = [x + \Delta^m(0)]^\varpi,$$

en convenant de remplacer la $i^{\text{ième}}$ puissance de $\Delta^m(0)$ par $\Delta^m(0^i)$. Si l'on introduit ce résultat, presque évident, dans la formule (5), on trouve, pour $x = 0$,

$$[\Delta^m(0^\varpi)]^p = \sum_i \left\{ \mathop{\mathrm{S}}_{p+i}^{p} [C_{\varpi,r}\,\Delta^{m-1}(0^{\varpi-r})] \right\}.$$

Par exemple, pour $m = 2$,

$$(2^\varpi - 2)^p = \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{p}(C_{\varpi,r}) + \mathop{\mathrm{S}}_{p+1}^{p}(C_{\varpi,r}) + \mathop{\mathrm{S}}_{p+2}^{p}(C_{\varpi,r}) + \ldots,$$

. . . .

13. Dernière application : pour $y = \frac{1}{x}$ et $\Delta x = -xz$, la formule (6) devient

$$(10) \qquad \frac{1.2.3\ldots m}{(1-z)(1-2z)\ldots(1-mz)} = \sum_{i=0}^{=\infty} \Delta^m(0^{m+i})\,z^i.$$

Conséquemment, en vertu des formules (3) et (4),

$$\frac{\Delta^m(0^{m+p})}{m!} = \sum_{i=1}^{i=p}\left[(-1)^{p+i}\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{i}(s_{r,m})\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{i=p}\left[\frac{1}{i!}\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{i}\left(\frac{1^r + 2^r + \ldots + m^r}{r}\right)\right].$$

IV. — Algorithmes isobariques composés.

14. Nous appelons ainsi toute combinaison linéaire d'algorithmes *isobariques* élémentaires d'une même fonction, quelles que soient, d'ailleurs, leurs *degrés*. On a vu, précédemment, que ces algorithmes composés interviennent dans l'expression des dérivées des fonctions de fonctions : nous les rencontrerons dans un grand nombre d'autres questions.

15. On sait que plusieurs géomètres ont imaginé des algorithmes, propres à *réglementer*, pour ainsi dire, l'*Analyse partitive*, cette importante et féconde branche de l'Algèbre, que M. Sylvester appelle, avec beaucoup de raison, l'*âme* de toute l'Analyse. Or il est curieux de constater que tous les inventeurs, en agissant les uns à l'insu des autres, ont été d'accord dans le choix de l'algorithme isobarique *composé* comme base du calcul des partitions. Nous montrerons, en effet, qu'un tel algorithme ne diffère pas de celui qui a été étudié l'année dernière par M. d'Ocagne dans les *Nouvelles Annales*. On sait, d'ailleurs, que le même algorithme, précédemment étudié par Wronski, sous le nom de *fonction aleph*, a été l'objet de recherches de beaucoup de géomètres. Ici, nous voulons seulement signaler à l'attention des jeunes inventeurs les travaux, injustement méconnus, de plusieurs savants professeurs de l'Université de Naples : MM. Trudi, Fergola, Torelli, etc., qui ont publié, à différentes reprises, dans le *Journal de Battaglini* et ailleurs, d'intéressantes Notes sur l'algorithme en question. De plus, on trouve dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Naples* quelques importants Mémoires de M. Trudi sur le même sujet. Ils sont surtout à recommander pour les renseignements bibliographiques et les Notices historiques, nombreuses et intéressantes.

16. Les mathématiciens, avons-nous dit, ont tâché de

prendre comme base de l'Analyse partitive l'algorithme isobarique *composé*, c'est-à-dire *une somme d'algorithmes simples*, de *même poids*, mais de *degrés différents*. L'algorithme-élément semble être resté inconnu jusqu'à présent; mais c'est évidemment cet *algorithme élémentaire* $\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}$ qu'il faut, désormais, considérer comme *élément primordial* dans le calcul des partitions : ce sont ses propriétés que l'on doit rechercher et étudier, afin qu'elles constituent le fondement de l'Analyse partitive; car cet algorithme est le seul qui possède la propriété d'être à la fois *isobarique* et *homogène*, et de ne pas souffrir une ultérieure décomposition en éléments d'une plus grande simplicité.

17. M. d'Ocagne représente par $[a_1 a_2 a_3 \ldots a_m]^{(p)}$ le résultat que l'on obtient en remplaçant par l'unité les coefficients numériques, dans le développement de $(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m)^p$. Tout en nous conformant à cette notation, nous écrirons, plus brièvement, $[a_\nu]_m^p$. M. d'Ocagne donne ensuite la formule

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{(1-a_1x)(1-a_2x)\ldots(1-a_mx)} \\ &\quad = 1 + [a_\nu]_m^1 x + [a_\nu]_m^2 x^2 + [a_\nu]_m^3 x^3 + \ldots . \end{aligned}\right.$$

En vertu des égalités (3) et (4), on voit que l'algorithme $[a_\nu]_m^p$ est *composé* et *isobarique*; car il peut être mis sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$(12)\quad [a_\nu]_m^p = \sum_{i=1}^{i=p}\left[(-1)^{p+i}\overset{i}{\underset{p}{\mathrm{S}}}(c_r)\right] = \sum_{i=1}^{i=p}\left[\frac{1}{i!}\overset{i}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left(\frac{s_r}{r}\right)\right].$$

Naturellement, les sommes c_r doivent être considérées comme *nulles*, lorsque r surpasse m.

18. Si $a_\nu = \nu$, l'examen simultané des formules (10) et (11) montre que

$$[\nu]_m^p = \frac{\Delta^m(0^{m+p})}{1.2.3\ldots m}.$$

Cette formule, qui sera généralisée plus loin, a été remarquée par M. d'Ocagne, qui l'a obtenue par comparaison avec une formule donnée par M. Schlömilch, dans un Mémoire *Sur les facultés analytiques*.

19. Faisons remarquer aussi l'expression des *nombres d'Euler* sous forme d'algorithme composé isobarique :

$$(-1)^p \frac{E_{2p}}{1.2.3\ldots 2p} = \left(\frac{4}{\pi^2}\right)^p \left[\frac{1}{(2\nu-1)^2}\right]_\infty^p.$$

On y arrive immédiatement par la décomposition de la fonction $\cos x$ en ses facteurs primaires, et le développement connu de $\operatorname{séc} x$. L'emploi de la fonction $\frac{\sin x}{x}$ conduit, au contraire, à la représentation des *nombres de Bernoulli,* moyennant l'algorithme $\left[\frac{1}{\nu^2}\right]_\infty^p$.

20. Désignons, pour abréger, par $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m)$ le premier membre de (11), et imaginons que l'élément a_i augmente de Δa_i. On trouve aisément cette égalité

$$\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_m) = (a_1, a_2, \ldots, a_m, a_i + \Delta a_i)\, x\, \Delta a_i,$$

contenue dans les *Mémoires* de M. Trudi. En égalant, dans les deux membres, les coefficients de x^p, on obtient

$$(13)\qquad \frac{\partial}{\partial a_i}[a_1 a_2 \ldots a_m]^p = [a_1 a_2 \ldots a_m a_i]^{p-1}.$$

Par conséquent, en suivant la marche indiquée par M. Torelli dans sa Note *Sulle funzioni simmetriche, complete e semplici*, on a

$$\frac{d}{dx}[\Omega]^p = [\Omega, x + a_1]^{p-1} + [\Omega, x + a_2]^{p-1} + \ldots + [\Omega, x + a_m]^{p-1},$$

pourvu que, pour abréger, on représente par Ω l'ensemble des éléments $x+a_1$, $x+a_2$, ..., $x+a_m$. Or il est évident que tout terme

$$(14)\quad \begin{cases} (x+a_1)^{\rho_1}(x+a_2)^{\rho_2}\ldots(x+a_m)^{\rho_m} \\ (\Sigma\rho = p-1, \quad \rho_i = 0, 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

du second membre est un terme de $[\Omega]^{p-1}$. D'autre part, il est clair que le terme (14), considéré comme *un terme donné* de $[\Omega]^{p-1}$, se trouve ρ_i+1 fois dans $[\Omega, x+a_i]^{p-1}$, et, par suite, $p+m-1$ fois dans la dérivée de $[\Omega]^p$. Il en résulte cette importante formule

$$(15)\qquad \frac{d}{dx}[\Omega]^p = (p+m-1)[\Omega]^{p-1}.$$

Par dérivations successives, on trouve, plus généralement,

$$\frac{1}{i!}\frac{d^i}{dx^i}[x+a_\nu]_m^p = C_{p+m-1,i}[x+a_\nu]_m^{p-i}.$$

Conséquemment, par le théorème de Maclaurin,

$$(16)\quad \begin{cases} [x+a_\nu]_m^p = [a_\nu]_m^p + C_{p+m-1,1}[a_\nu]_m^{p-1}x \\ \qquad\qquad + C_{p+m-1,2}[a_\nu]_m^{p-2}x^2 + \ldots. \end{cases}$$

21. Faisons, par exemple, $a_\nu = \nu$. On obtient

$$m![x+\nu]_m^p = \Delta^m(0^{m+p}) + C_{p+m-1,1}\,x\,\Delta^m(0^{m+p-1}) \\ + C_{p+m-1,2}\,x^2\Delta^m(0^{m+p-2}) + \ldots.$$

Si l'on observe que $\Delta^m(0^p) = m\Delta^{m-1}(1^{p-1})$, la dernière formule prend la forme symbolique

$$(m-1)![x+\nu]_m^p = [x+\Delta^{m-1}(1)]^{p+m-1} = \Delta^{m-1}[(x+1)^{p+m-1}].$$

Par le changement de m en $m+1$ et de $x+1$ en x, on en déduit la formule

$$[x, x+1, x+2, \ldots, x+m]^p = \frac{\Delta^m(x^{m+p})}{1.2.3\ldots m},$$

due à M. Fergola.

22. La formule (13) se démontre plus aisément en observant, avec M. d'Ocagne, que

$$[a_\nu]_m^p = [a_\nu]_{m-1}^p + a_m [a_\nu]_m^{p-1},$$

a_m pouvant, du reste, être considéré comme un *quelconque* des éléments a. De cette identité, appliquée plusieurs fois de suite, on déduit

$$(17)\quad [a_\nu]_m^p = [a_\nu]_{m-1}^p + a_m [a_\nu]_{m-1}^{p-1} + a_m^2 [a_\nu]_{m-1}^{p-2} + \ldots.$$

La dérivation de la même égalité donne

$$\frac{\partial}{\partial a_i}[a_\nu]_m^p = [a_\nu]_m^{p-1} + a_i \frac{\partial}{\partial a_i}[a_\nu]_m^{p-1};$$

puis, par applications successives,

$$(18)\quad \frac{\partial}{\partial a_i}[a_\nu]_m^p = [a_\nu]_m^{p-1} + a_i [a_\nu]_m^{p-2} + a_i^2 [a_\nu]_m^{p-3} + \ldots.$$

Il suffit, maintenant, d'avoir égard à la relation (17) pour obtenir immédiatement (13).

23. Il y a, d'ailleurs, une formule facile à établir qui rend presque *intuitive* la relation (16). En effet, dans sa Note *Sur un algorithme algébrique,* M. d'Ocagne a démontré que, si l'on pose

$$f(z) = (z - a_1)(z - a_2)\ldots(z - a_m),$$

on a

$$[a_\nu]_m^p = \sum \frac{a^{p+m-1}}{f'(a)}.$$

Si chacune des quantités a croît de x, la fonction $f(z)$ devient $f(z - x)$, et la dernière formule donne

$$[x + a_\nu]_m^p = \sum \frac{(x + a)^{p+m-1}}{f'(a)}.$$

On voit immédiatement que le coefficient de x^i, dans le développement du second membre, est

$$C_{p+m-1,\,i}[a_\nu]_m^{p-i}.$$

24. Si l'on pose

$$g(z) = (1 - a_1 z)(1 - a_2 z)\ldots,$$

la formule de M. d'Ocagne peut prendre la forme

$$[a_\nu]_m^p = -\sum \frac{a^{p+1}}{g'\left(\frac{1}{a}\right)},$$

plus utile au point de vue des applications, surtout dans le cas de m infini. Par exemple, pour $a_\nu = \frac{1}{(2\nu - 1)^2}$, on a

$$g(z) = \cos \frac{\pi\sqrt{z}}{2},$$

et l'on trouve

$$\left[\frac{1}{(2\nu - 1)^2}\right]_\infty^p = 4\left(1 - \frac{1}{3^{2p+1}} - \frac{1}{5^{2p+1}} - \ldots\right).$$

25. Dans (18), faisons varier i de 1 à m, et additionnons. D'après (15), la somme des premiers membres est

$$(p + m - 1)[a_\nu]_m^{p-1}.$$

Si l'on change p en $p+1$, on trouve donc

$$(19)\qquad p[a_\nu]_m^p = s_1[a_\nu]_m^{p-1} + s_2[a_\nu]_m^{p-2} + s_3[a_\nu]_m^{p-3} + \ldots.$$

C'est là une identité remarquable, que l'on peut rapprocher de celle-ci :

$$(20)\qquad [a_\nu]_m^p = c_1[a_\nu]_m^{p-1} - c_2[a_\nu]_m^{p-2} + c_3[a_\nu]_m^{p-3} - \ldots,$$

point de départ de l'étude de M. d'Ocagne *Sur les séries récurrentes*. Pour en montrer une application, observons que, en vertu d'une célèbre formule d'Euler,

$$[q^\nu]_\infty^p = \frac{q^p}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^p)}.$$

La relation (19) devient

$$p = \frac{1-q^p}{1-q} - \frac{(1-q^p)(1-q^{p-1})}{1-q^2} + \frac{(1-q^p)(1-q^{p-1})(1-q^{p-2})}{1-q^3} - \ldots.$$

26. Les formules que nous avons données, ailleurs, pour la *résolution des récurrences,* permettent de déduire des égalités (19) et (20) les relations isobariques

$$c_p = \sum_{i=1}^{i=p} \left((-1)^{p+i} \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{i} \left\{ [a_\nu]_m^i \right\} \right),$$

$$s_p = \sum_{i=1}^{i=p} \left((-1)^{i-1} \frac{p}{i} \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{i} \left\{ [a_\nu]_m^i \right\} \right),$$

qui *intervertissent,* pour ainsi dire, les formules (12). En particulier, pour m infini et $a_\nu = q^\nu$, toutes ces relations acquièrent de l'intérêt. Par exemple, si, pour abréger, on pose

$$Q_i = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^i)},$$

on obtient

$$q^{\frac{p^2}{2}} Q_p = \sum_{i=1}^{i=p} \left\{ (-1)^{p+i} \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{i} \left[q^{\frac{i}{2}} Q_i \right] \right\},$$

$$q^{\frac{p}{2}} Q_p = \sum_{i=1}^{i=p} \left\{ (-1)^{p+i} \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{i} \left[q^{\frac{i^2}{2}} Q_i \right] \right\}.$$

V. — Algorithmes homogènes composés.

27. Nous venons de rencontrer des algorithmes composés, isobariques, mais non homogènes. Il en est d'autres qui sont *homogènes,* sans être *isobariques,* et nous allons les voir paraître dans une importante question, à savoir le *développement, suivant les puissances* *de x, de l'algorithme élémentaire de $x+\varepsilon_i$.* On peut toujours poser *symboliquement*

$$(21)\qquad \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m}(x+\varepsilon_i) = [x+A_{p,m}]^m,$$

en entendant que le second membre représente

$$A_{p,m}^{(0)}x^m + C_{m,1}A_{p,m}^{(1)}x^{m-1} + C_{m,2}A_{p,m}^{(2)}x^{m-2} + \ldots + A_{p,m}^{(m)}.$$

Il s'agit de calculer les coefficients A. Par une méthode analogue à celle qui a été employée pour le développement de l'algorithme *isobarique composé*, on trouve

$$A_{p,m}^{(i)} = \sum_{j=0}^{j=p-m} C_{m-i+j-1,\,j} \mathop{\mathrm{S}}_{p,\,m+i-j}^{i}(\varepsilon_i).$$

Le coefficient $A_{p,m}^{(i)}$ est donc un algorithme *homogène*, du *degré* i.

28. La formule (21) se généralise aisément. Nous laisserons au lecteur le soin de démontrer la relation

$$(22)\qquad \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m}(\varepsilon_i+\eta_i) = \sum_{i=0}^{i=m}\left[C_{m,i}\sum_{j=0}^{j=p-m}\mathop{\mathrm{S}}_{i+j}^{i}(\varepsilon_i)\mathop{\mathrm{S}}_{p-i-j}^{m-i}(\eta_i)\right].$$

Signalons, comme cas particuliers, la formule

$$2^m C_{p,m} = \sum_{i=0}^{i=m}\left[C_{m,i}\sum_{j=0}^{j=p-m} C_{i+j,\,i}\, C_{p-i-j,\,m-i}\right],$$

et d'intéressants développements, que l'on obtient en employant la relation (22) pour transformer les seconds membres des formules (8) et (9).

29. Du reste, on est conduit, par une voie aisée, aux relations qui précèdent, lorsqu'on cherche à établir certaines propriétés fondamentales de l'algorithme élémen-

taire. Désignons par $\mathop{\mathrm{S}}\limits_{p}^{m}{}^{(\iota)}$ l'ensemble des termes de $\mathop{\mathrm{S}}\limits_{p}^{m}$ qui ne renferment pas l'élément ε_ι. Puis, distinguons, dans $\mathop{\mathrm{S}}\limits_{p}^{m}$, les termes qui contiennent ε_ι à la première puissance, au carré, au cube, etc. On a visiblement

$$(23)\qquad \mathop{\mathrm{S}}\limits_{p}^{m} = \mathop{\mathrm{S}}\limits_{p}^{m}{}^{(\iota)} + \mathrm{C}_{m,1}\varepsilon_\iota \mathop{\mathrm{S}}\limits_{p-1}^{m-1}{}^{(\iota)} + \mathrm{C}_{m,2}\varepsilon_\iota^2 \mathop{\mathrm{S}}\limits_{p-2}^{m-2}{}^{(\iota)} + \ldots .$$

On en déduit

$$\frac{d}{d\varepsilon_\iota}\mathop{\mathrm{S}}\limits_{p}^{m} = m\left[\mathop{\mathrm{S}}\limits_{p-1}^{m-1}{}^{(\iota)} + \mathrm{C}_{m-1,1}\varepsilon_\iota \mathop{\mathrm{S}}\limits_{p-2}^{m-2}{}^{(\iota)} + \mathrm{C}_{m-1,2}\varepsilon_\iota^2 \mathop{\mathrm{S}}\limits_{p-3}^{m-3}{}^{(\iota)} + \ldots\right],$$

ou bien, en vertu de (23),

$$\frac{d}{d\varepsilon_\iota}\mathop{\mathrm{S}}\limits_{p}^{m} = m\mathop{\mathrm{S}}\limits_{p-1}^{m-1}.$$

En conséquence, si l'on ajoute x à chaque élément ε, on a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m}\frac{d}{dx}\mathop{\mathrm{S}}\limits_{p}^{m}(x+\varepsilon_\iota) \\ &= \mathop{\mathrm{S}}\limits_{p-1}^{m-1}(x+\varepsilon_\iota) + \mathop{\mathrm{S}}\limits_{p-2}^{m-1}(x+\varepsilon_\iota) + \mathop{\mathrm{S}}\limits_{p-3}^{m-1}(x+\varepsilon_\iota) + \ldots . \end{aligned}$$

Plus généralement, on trouve, par dérivations successives,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m(m-1)\ldots(m-\iota+1)}\frac{d^\iota}{dx^\iota}\mathop{\mathrm{S}}\limits_{p}^{m}(x+\varepsilon_\iota) \\ &= \mathop{\mathrm{S}}\limits_{p-\iota}^{m-\iota}(x+\varepsilon_\iota) + \mathrm{C}_{\iota,1}\mathop{\mathrm{S}}\limits_{p-\iota-1}^{m-\iota}(x+\varepsilon_\iota) + \mathrm{C}_{\iota,2}\mathop{\mathrm{S}}\limits_{p-\iota-2}^{m-\iota}(x+\varepsilon_\iota) + \ldots \end{aligned}$$

Il suffit de faire $x = 0$ pour obtenir l'expression de $A^{(\iota)}_{p,m}$.

30. Les derniers développements se prêtent à d'autres considérations. Remarquons, en effet, que si l'on pose, pour un moment,

$$\underset{p-\nu\iota,\,m-\nu}{\overset{\nu}{S}} = \sigma_\nu,$$

on a, en vertu de ce que nous venons de dire, l'égalité *symbolique*

$$(24) \qquad \sigma_m = [\sigma^{\iota} + \varepsilon_\iota]^m.$$

Les règles du *calcul symbolique* permettent d'*invertir* cette relation, en écrivant

$$(25) \qquad \sigma^{(\iota)}_m = [\sigma - \varepsilon_\iota]^m.$$

c'est-à-dire

$$\overset{m}{\underset{p}{S}}{}^{(\iota)} = \overset{m}{\underset{p}{S}} - C_{m,1}\,\varepsilon_\iota \overset{m-1}{\underset{p-\iota}{S}} + C_{m,2}\,\varepsilon_\iota^2 \overset{m-2}{\underset{p-2\iota}{S}} - C_{m,3}\,\varepsilon_\iota^3 \overset{m-3}{\underset{p-3\iota}{S}} + \ldots.$$

31. On peut donner une interprétation facile de la formule (25), dans le cas de $\varepsilon_\iota = 1$. On voit alors que la $m^{\text{ième}}$ *différence du premier terme de la série*

$$\overset{0}{\underset{p,\,m}{S}},\quad \overset{1}{\underset{p-\iota,\,m-1}{S}},\quad \overset{2}{\underset{p-2\iota,\,m-2}{S}},\quad \overset{3}{\underset{p-3\iota,\,m-3}{S}},\quad \ldots$$

n'est autre que la partie de $\overset{m}{\underset{p}{S}}$ *indépendante de* ε_ι.

32. Les égalités (24) et (25) nous intéressent surtout parce qu'elles permettent d'établir des relations entre les algorithmes de *fonctions différentes* Dans ce but,

supposons $i = 1$, et observons que, si l'on veut négliger, dans $\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}$, les termes contenant ε_1, on doit résoudre en nombres entiers, *supérieurs à l'unité*, l'équation $\Sigma r = p$, ce qui revient à poser $r = r' + 1$, et à résoudre en nombres entiers l'équation $\Sigma r' = p - m$. On a donc

$$\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}{}^{(1)}(\varepsilon_r) = \overset{m}{\underset{p-m}{\mathrm{S}}}(\varepsilon_{r+1}).$$

Conséquemment, en nous reportant à ce qui a été dit plus haut, *si l'on considère la série*

$$\overset{0}{\underset{p}{\mathrm{S}}}(\varepsilon_r), \quad \overset{1}{\underset{p+1}{\mathrm{S}}}(\varepsilon_r), \quad \overset{2}{\underset{p+2}{\mathrm{S}}}(\varepsilon_r), \quad \overset{3}{\underset{p+3}{\mathrm{S}}}(\varepsilon_r), \quad \ldots,$$

on a

$$\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}(\varepsilon_{r+1}) = \Delta^m\left(\overset{0}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\right),$$

pourvu que $\varepsilon_1 = 1$. Par exemple, dans notre article *Propriétés d'une fonction arithmétique,* nous avons étudié certain algorithme $u_{m,p}$ qui ne diffère pas de l'algorithme $\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}$ relatif *à la fonction* $\frac{1}{r+1}$. D'après ce qui vient d'être dit, et en nous rappelant l'expression de $\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left(\frac{1}{r}\right)$, donnée au commencement de ces Notes, nous pouvons affirmer que $u_{m,p}$ *est la* $m^{ième}$ *différence du premier terme de la série*

$$0, \quad \frac{s_{p.p}}{2.3\ldots(p+1)}, \quad \frac{s_{p.p+1}}{3.4\ldots(p-2)}, \quad \frac{s_{p.p+2}}{4.5\ldots(p+3)}, \quad \ldots.$$

33. En outre, pour $i = 1$, les égalités (24) et (25)

deviennent

$$\underset{p}{\overset{m}{\mathbf{S}}}(\varepsilon_r) = \sum_{i=1}^{i=m} C_{m,i}\,\varepsilon_1^{m-i} \underset{p-m}{\overset{i}{\mathbf{S}}}(\varepsilon_{r+1}),$$

$$\underset{p}{\overset{m}{\mathbf{S}}}(\varepsilon_{r+1}) = \sum_{i=1}^{i=m} C_{m,i}\,(-\varepsilon_1)^{m-i} \underset{p+i}{\overset{i}{\mathbf{S}}}(\varepsilon_r).$$

Dans le cas particulier, considéré en dernier lieu, nous aurons donc

$$\frac{s_{p,p+m-1}}{(m+1)(m+2)..(m+p)} = \sum_{i=1}^{i=m} C_{m,i}\,u_{i,p},$$

$$(m+1)(m+2)\ldots(m+p)\,u_{m,p} = \sum_{i=1}^{i=m}(-1)^{i-1}C_{p+m,i-1}\,s_{p,p+m-i}.$$

34. Nous avons là des relations entre les algorithmes des fonctions ε_r et ε_{r+1}; mais on peut en établir entre les algorithmes de deux fonctions *quelconques*. Voici, par exemple, comment les algorithmes de $\frac{1}{r!}$ s'expriment au moyen des algorithmes de $\frac{1}{r}$,

$$\frac{1}{m}\,\frac{\Delta^m(0^{m+p})}{(2p+1)(2p+2)\ldots(2p+m)}$$
$$= \frac{s_{p,2p-1}}{2p+m} - C_{2p,1}\,\frac{s_{p,2p-2}}{2p+m-1} + C_{2p,2}\,\frac{s_{p,2p-3}}{2p+m-2} - \ldots,$$

Les mêmes algorithmes sont donnés en fonction des algorithmes de $\frac{1}{r+1}$ par la formule

$$\frac{(-1)^{p-1}}{m}\,\frac{\Delta^m(0^{m+p})}{(m+p-1)!}$$
$$= C_{p+m,1}\,u_{1,p} - C_{p+m+1,2}\,u_{2,p} + C_{p+m+2,3}\,u_{3,p} - \ldots.$$

Les formules (24) et (25), bien que fort particulières, nous serviront à développer, suivant les puissances de x, la fonction algorithmique $U_{p,m}(x)$; car, par l'emploi des mêmes formules, la fonction U se ramène aisément à la fonction W, dont nous avons donné le développement dans un de nos articles sur le *Calcul isobarique*.

35. Nous ne devons pas terminer ces Notes sans signaler une importante généralisation de l'idée même de l'algorithme élémentaire. On y est conduit inévitablement quand on cherche à mettre le second membre de l'égalité (23) sous forme d'*algorithme d'algorithme*. On reconnaît que cela est possible seulement pour $\varepsilon_r = \eta_r$; mais, en général, on doit d'abord imaginer, dans l'idée d'algorithme, l'extension suivante : les différents éléments appartiennent à *différents* systèmes de nombres, de telle sorte que les éléments du *même système* occupent toujours, dans chaque terme, le *même rang*. Si l'on convient de distinguer par un indice supérieur les éléments de chaque système, on a

$$\underset{p}{\overset{1}{\mathrm{S}}}\left[\varepsilon_r^{(\rho)}\right] = \varepsilon_p^{(1)}, \quad \underset{p}{\overset{2}{\mathrm{S}}}\left[\varepsilon_r^{(\rho)}\right] = \varepsilon_1^{(1)}\varepsilon_{p-1}^{(2)} + \varepsilon_2^{(1)}\varepsilon_{p-2}^{(2)} + \ldots + \varepsilon_{p-1}^{(1)}\varepsilon_1^{(2)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\underset{p}{\overset{p-1}{\mathrm{S}}}\left[\varepsilon_r^{(\rho)}\right] = \varepsilon_1^{(1)}\varepsilon_1^{(2)}\ldots\varepsilon_1^{(p-1)}\left[\frac{\varepsilon_2^{(1)}}{\varepsilon_1^{(1)}} + \frac{\varepsilon_2^{(2)}}{\varepsilon_1^{(2)}} + \ldots + \frac{\varepsilon_2^{(p-1)}}{\varepsilon_1^{(p-1)}}\right],$$

$$\underset{p}{\overset{p}{\mathrm{S}}}\left[\varepsilon_r^{(\rho)}\right] = \varepsilon_r^{(1)}\varepsilon_1^{(2)}\ldots\varepsilon_1^{(p)}.$$

C'est seulement en vertu de cette extension qu'il est possible de donner une forme algorithmique au second membre de (23), et, plus généralement, de résoudre le problème de la *représentation de l'algorithme élémentaire d'une somme de fonctions, en nombre quelconque, moyennant les algorithmes des mêmes fonctions*. Nous nous en occuperons bientôt.