NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Questions proposées par M. E. Cesàro (suite)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 556-565

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__556_1>

QUESTIONS PROPOSÉES PAR M. E. CESARO

[SUITE (1)].

28. Dans tout triangle, de périmètre donné, il y a 23 à parier contre 4 qu'il existe une médiane, et une seule, moindre que le quart du périmètre. S'il n'y a pas une médiane moindre que le quart du périmètre, il y en a deux, ou bien il n'y en a pas, et ces deux cas sont également possibles, c'est-à-dire que l'on peut, pour chacun d'eux, parier 2 contre 23.

(1) *Voir* même Tome, p. 448.

29. Dans un triangle de périmètre donné :

1° On ne doit jamais parier plus de 6 contre 1 qu'un seul des côtés est moindre qu'une certaine fraction du périmètre. On peut faire le pari maximum quand cette fraction est $\frac{2}{7}$.

2° On ne doit jamais parier plus de 7 contre 6 que deux côtés, ni plus ni moins, sont moindres qu'une certaine fraction du périmètre. On peut faire le pari maximum quand cette fraction est $\frac{5}{13}$.

30. Ayant brisé une barre en trois morceaux :

1° On ne doit jamais parier plus de 3 contre 2 qu'un de ces morceaux, et un seul, est moindre qu'une certaine fraction de la barre. On peut faire le pari maximum quand cette fraction est $\frac{1}{5}$.

2° On ne doit jamais parier plus de 6 contre 1 que deux morceaux, et deux seulement, sont moindres qu'une certaine fraction de la barre. On peut faire le pari maximum quand cette fraction est $\frac{3}{7}$.

31. La moyenne géométrique de deux quantités quelconques est égale, en moyenne, aux $\frac{8}{9}$ de leur moyenne arithmétique.

32. 1° L'équation

$$(1) \qquad \left(\int s\,dx\right)^2 + \left(\int s\,dy\right)^2 = \frac{\theta}{4} s^4$$

ne représente des lignes réelles que si θ est une fraction proprement dite.

2° Si $\theta = \cos^2\varphi$, l'équation (1) représente les spirales logarithmiques, qui rencontrent leurs rayons vecteurs sous un angle V, tel que

$$(2) \qquad \operatorname{tang} V = 2 \operatorname{tang} \varphi.$$

3° Donner l'interprétation géométrique des équations (1) et (2).

33. Sur les côtés d'un triangle ABC on prend trois points A', B', C', tels que les droites AA', BB', CC' concourent en un même point. Démontrer que le rapport des aires des triangles A'B'C', ABC, toujours compris entre 0 et $\frac{1}{4}$, a pour valeur moyenne

$$\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} = 0,1168\ldots.$$

34. Le rapport de l'aire d'un triangle à l'aire du cercle isopérimètre est égal, en moyenne, à

$$\frac{4\pi^2}{105} = 0,3758\ldots.$$

Remarque. — Le rapport en question est toujours compris entre 0 et

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 0,6046\ldots.$$

35. Si $\varphi_K(x)$ est le nombre des fractions irréductibles, de numérateur x, supérieures à K, on a

$$\varphi_K(a) + \varphi_K(b) + \varphi_K(c) + \ldots = \left[\frac{n}{K}\right],$$

a, b, c, ... étant tous les diviseurs de n.

36. La probabilité que, dans la division de la racine carrée du plus grand diviseur carré d'un nombre, pris au hasard, par un nombre fixe α, on obtienne, par excès ou par défaut, le reste r, est

$$\frac{5}{\alpha^2 \sin^2 \frac{\pi r}{\alpha}}.$$

37. Les probabilités que le plus grand diviseur carré d'un nombre, pris au hasard, se termine par 0 ou 5, ou par 4 ou 6, ou par 1 ou 9, sont respectivement

$$\frac{1}{25}, \frac{6}{25}, \frac{18}{25}.$$

38. Il y a 7 à parier contre 3 que la racine du plus grand diviseur d'un nombre, pris au hasard, est composée d'un nombre *pair*, plutôt que d'un nombre *impair* de facteurs premiers, égaux ou inégaux.

39. La probabilité que, dans une division quelconque, le $m^{\text{ième}}$ chiffre décimal soit r, est

$$\frac{1}{20} + \frac{10^m}{2} \int_0^1 \frac{1-x}{1-x^{10}} x^{10^m-1+} \, dx.$$

40. Dans toute division, le moyen rapport du plus petit reste au diviseur est

$$\frac{1}{8} + \log \frac{2}{\sqrt{\pi}} = 0,245782\ldots$$

41. Dans toute division, le dernier chiffre du quotient est moyennement égal au logarithme naturel de $\sqrt{10}$.

42. On partage n, de toutes les manières possibles, en parties égales à 1, p, ou $p+1$. Ces partitions étant rangées en deux classes, suivant que le nombre des parties est *pair* ou *impair*, démontrer que la différence entre les nombres des partitions des deux classes surpasse de 1 le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{n}{p}$, lorsque p est *impair*.

43. Soit N_p le nombre des solutions *entières* et *po-*

sitives des équations *simultanées*

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_\nu y_\nu = n, \quad x_1x_2\ldots x_\nu = p.$$

L'expression

$$N_1 - N_2 - N_3 + N_4 - N_5 + N_6 - N_7 - N_8 + N_9 + \ldots$$

égale *le nombre des décompositions de n en une somme de* ν *carrés.*

N.-B. — Chaque N_p a été affecté du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que p est décomposable en un nombre *pair* ou un nombre *impair* de facteurs premiers, égaux ou inégaux.

44. Soit Δ_n un déterminant de $(n-1)^2$ éléments, dans lequel l'élément général u_{ij} est égal à la *somme des carrés des diviseurs communs de* $i+1$ *et* $j+1$. Démontrer que, lorsque n augmente indéfiniment,

$$\lim \frac{e^n \Delta_n}{n^{2n+1}} = \frac{30}{\pi}.$$

45. n et ν étant deux nombres entiers, démontrer que la somme des plus grands nombres entiers contenus dans les quantités

$$nx,\ n\left(x+\frac{1}{\nu}\right),\ n\left(x+\frac{2}{\nu}\right),\ \ldots,\ n\left(x+\frac{\nu-1}{\nu}\right)$$

est égale à la somme des plus grands nombres entiers contenus dans les quantités

$$\nu x,\ \nu\left(x+\frac{1}{n}\right),\ \nu\left(x+\frac{2}{n}\right),\ \ldots,\ \nu\left(x+\frac{n-1}{n}\right).$$

46. La somme des inverses des termes de la série de Lamé n'atteint pas 2,36.

47. 1° Les pôles d'une droite D, par rapport à une série de coniques homofocales, se trouvent sur la perpendiculaire à la droite, élevée au point où celle-ci est touchée par une des coniques.

2° Les points de contact des tangentes aux coniques, parallèles à D, se trouvent sur une hyperbole équilatère, concentrique avec les coniques, passant par les foyers et ayant une asymptote parallèle à D.

3° Lorsque D change de direction, les sommets et les foyers de l'hyperbole décrivent des lemniscates de Bernoulli.

48. On a

$$1^p x + 2^p x^2 + 3^p x^3 + \ldots + n^p x^n = a^p - x^{n+1}(a + n + 1)^p,$$

à condition de remplacer chaque puissance a^k par le coefficient de $\frac{\alpha^k}{1.2.3\ldots k}$ dans le développement de $\frac{1}{1-e^{\alpha}x}$.

49. Si p est premier avec n et $n-1$, et si $p-1$ est premier avec $n-1$, $C_{n,p}$ est divisible par $n(n-1)$.

50. Démontrer que l'équation

$$x^m + \frac{m^k}{1} x^{m-1} + \frac{m^k(m-1)^k}{1.2} x^{m-2} + \ldots = 0$$

a toutes ses racines réelles.

51. Soit

$$u_i = \frac{x^{i-1}}{1-x^i}.$$

Démontrer l'identité

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = u_1^2 - u_1 u_2^2 + u_1 u_2 u_3^2 - u_1 u_2 u_3 u_4^2 + \ldots.$$

52. Soient respectivement A_p, B_p les coefficients de

x^p dans les développements de la fonction

$$(1-ax)(1-bx)(1-cx)\dots$$

et de son inverse. Démontrer la formule

$$a^p+b^p+c^p+\dots=B_1A_{p-1}+2B_2A_{p-2}+\dots+pB_p.$$

53. Démontrer l'identité

$$\sum_1^\infty \frac{x^i}{(1+x^i)^2}=\sum_1^\infty \frac{\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1-x^2}+\dots+\dfrac{1}{1-x^i}}{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^i)}\,\frac{x^{\frac{i(i+1)}{2}}}{1-x^i}.$$

54. La somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation

$$f(\alpha)x^n+\frac{f'(\alpha)}{1}x^{n-1}+\frac{f''(\alpha)}{1.2}x^{n-2}+\dots=0$$

est égale à

$$-\frac{1}{1.2.3\dots p}\,\frac{d^p}{d\alpha^p}\log f(\alpha),$$

pourvu que p ne surpasse pas n.

55. Si les coefficients de l'équation

$$x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\dots+A_m=0$$

satisfont aux relations

$$A_p^2=2\sum_{i=1}^{i=p}(-1)^{i-1}A_{p-i}A_{p+i}\qquad \left(1\overline{\gtrless}\, p\,\overline{\gtrless}\,\frac{m}{2}\right),$$

la somme des puissances $2p^{\text{iemes}}$, $(\overline{\gtrless}\, m)$, de ses racines est nulle, tandis que la somme des puissances $(2p-1)^{\text{ièmes}}$, $(\overline{\gtrless}\, m)$ est représentée par

$$\sum_{i=1}^{i=p}(-1)^{p+i-1}(2i-1)A_{p-i}A_{p+i-1}.$$

56. On calcule une double série de fonctions, d'après la loi

$$\varepsilon_{n,i} = 1 - x^{1+i}\varepsilon_{n-1,1} + x^{3+2i}\varepsilon_{n-1,2} - x^{6+3i}\varepsilon_{n-1,3} + \ldots,$$

avec les conditions initiales $\varepsilon_{1,i} = 1$. Démontrer que la somme

$$1 - \frac{x}{1-x}\varepsilon_{n,1} + \frac{x}{1-x}\,\frac{x^2}{1-x^2}\varepsilon_{n,2} - \frac{x}{1-x}\,\frac{x^2}{1-x^2}\,\frac{x^3}{1-x^3}\varepsilon_{n,3} + \ldots$$

est identique avec la $n^{\text{ième}}$ puissance de

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots.$$

57. On a une suite de fonctions arithmétiques

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots,$$

liées par les égalités

$$f_i(x) - f_{i-1}(x) = f_i(x - i + 1).$$

La première fonction, généralement nulle, est $(-1)^{i+1}$ lorsque x a la forme $\frac{3i^2 \pm i}{2}$. Démontrer que *la somme*

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots$$

est égale au nombre des diviseurs de x. [On suppose $f_i(x) = 0$, lorsque i surpasse x.]

58. Soit E_p le $p^{\text{ième}}$ *nombre d'Euler*. Démontrer que les sommes, dont les termes généraux sont

$$\frac{E_{2n}}{(2n+1)!}\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x^{2n+1}}{2}\right),\quad \frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n+1)!}\operatorname{arctang} e^{x^{2n+1}}$$

(n variant de 0 à $= +\infty$), ne diffèrent que par une constante.

59. Les seuls nombres entiers qui diffèrent de *cinq* unités, et dont la somme des carrés soit un cube, sont 47 et 52.

60. Si la différence de deux entiers est un nombre *premier*, la somme de leurs carrés n'est pas une cinquième puissance.

61. Si p est un nombre *premier*, de la forme $18\mu \pm 7$, l'équation

$$x^2 + (x+p)^2 = y^3$$

est impossible en nombres entiers.

62. Soit B_m le $m^{\text{ième}}$ *nombre de Bernoulli*, et P_m le $m^{\text{ième}}$ *polynôme de Catalan*, c'est-à-dire

$$P_m(x) = (1-x)^{m+1}\,[(1^m + 2^m x + 3^m x^2 + \ldots)];$$

démontrer la relation symbolique

$$[(1-x)\,B + P]^m - [(1-x)\,B]^m = m\,P^{m-1}.$$

63. Soit

$$Q_n(x) = (1-qx)(1-q^2x)(1-q^3x)\ldots(1-q^nx).$$

Démontrer l'identité

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^{n-1}x^n\,Q_\infty(x^n)}{Q_{n-1}(1)} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\pm q^{\frac{n(n-1)}{2}}\,x^n}{Q_{n-1}(1)\,Q_\infty(x^n)}.$$

64. Ayant posé

$$s_p = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p,$$

démontrer la relation

$$s_1\,\Delta^n(0^{n+p-1}) + s_2\,\Delta^n(0^{n+p-2}) + s_3\,\Delta^n(0^{n+p-3}) + \ldots = p\,\Delta^n(0^{n+p}).$$

65. Soit $u_p = 1 + \frac{p}{n}$. Démontrer que, pour n infini,

$$\lim \sqrt[n]{u_1^{u_1} u_2^{u_2} u_3^{u_3} \ldots u_n^{u_n}} = 4\, e^{-\frac{3}{4}}.$$

66. Démontrer aussi que

$$\lim \sqrt[n]{u_1^{u_1^2} u_2^{u_2^2} u_3^{u_3^2} \ldots u_n^{u_n^2}} = 4^{\frac{4}{3}} e^{-\frac{7}{9}}.$$

67. Soit

$$s_n = \frac{1}{(n^2+1)^p} + \frac{1}{(n^2+4)^p} + \frac{1}{(n^2+9)^p} + \ldots.$$

Démontrer que, lorsque p tend vers l'unité, le produit

$$(p-1)(s_1 + s_2 + s_3 + \ldots)$$

tend vers $\frac{\pi}{4}$.