# Démonstration directe d'une identité

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 4 (1885), p. 537

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__537_0>

# DÉMONSTRATION DIRECTE D'UNE IDENTITÉ.

Dans son *Algèbre*, p. 5, M. de Longchamps donne l'identité suivante

$$\begin{aligned} &x(x+1)\ldots(x+y)+(x+1)\ldots(x+y+1)+\ldots \\ &\quad +(z-y)(z-y-1)\ldots(z-1)z \\ &= \frac{(z+1)z\ldots(z-y)-(x+y)\ldots(x-1)}{y+2}, \end{aligned}$$

et ajoute que *sa vérification directe présente des difficultés*. On lira donc peut-être avec intérêt la suivante, qui n'en présente aucune.

De l'expression

$$\begin{aligned} &(x-1)x(x+1)\ldots(x+y) \\ &\quad + x(x+1)\ldots(x+y+1)+\ldots \\ &\quad + (z-y-1)(z-y)\ldots z + (z-y)\ldots(z+1) \end{aligned}$$

retranchons l'expression même où tous les termes ont avancé d'un rang

$$\begin{aligned} &x(x+1)\ldots(x+y+1) \\ &\quad + (x+1)\ldots(x+y+2)+\ldots \\ &\quad + (z-y)\ldots(z+1)+(x-1)x(x+1)\ldots(x+y), \end{aligned}$$

nous aurons un résultat identiquement nul.

Or, en soustrayant les termes de même rang, on a

$$\begin{aligned} &x(x-1)\ldots(x+y)[x+y+1-x+1] \\ &\quad + (x+1)(x+2)\ldots(x+y+1)[x+y+2-x]+\ldots \\ &\quad + (z-y)\ldots z[z+1-z+y+1] \\ &\quad - (x-1)x\ldots(x+y)-(z-y)\ldots(z+1)=0, \end{aligned}$$

où tous les crochets se réduisent à $y+2$. En divisant par $y+2$, on a donc l'identité proposée. CH. B.