Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 519-535
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__519_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1362

(voir 2e série, t. XX, p. 192);

PAR M. ÉMILE CHRÉTIEN.

On donne, sur un plan : un point o, une circonférence, les extrémités a et b d'un diamètre de cette courbe et un autre diamètre D. *On demande de déterminer, sur la circonférence, un point m tel que les droites ma, mb interceptent sur* D *un segment vu du point o sous un angle droit.* (MANNHEIM.)

Lorsque le point m se déplace sur la circonférence, les droites ma et mb déterminent sur le diamètre D deux divisions homographiques; soient c et c' deux points homologues. Joignons c, o, et par le point o menons à la droite co une perpendiculaire qui coupera D en un point c''. Lorsque le point c se déplacera, au rayon co correspondra toujours un rayon oc''; donc les systèmes de points c et c'' seront homographiques; or les systèmes de points c' et c'' sont homographiques d'un même troisième : donc ils sont homographiques entre eux.

Pour trouver le point m tel que les droites ma et mb interceptent sur D un segment vu du point o sous un angle droit, il faudra chercher les points doubles des deux divisions homographiques déterminées par trois couples de points c' et c''. Un de ces points doubles étant déterminé, on le joindra au point b par une droite qui rencontrera la circonférence au point m cherché. Comme il y a deux points doubles, il y aura deux points m si les points doubles sont réels.

La même question a été résolue par MM. Frédéric Amoder, élève de l'École de Magistero, de Naples; Ferdinando Pisani, professeur du Royal Institut technique de Messine; Lez; Herzogue, du Lycée de Rouen.

Question 1489

(voir 3e série, t. III, p. 351);

PAR M. CATALAN.

p étant un nombre premier, et P un polynôme entier, à coefficients entiers, l'équation

$$(x+y)^p - x^p - y^p = pxy(x+y)P^2 \tag{1}$$

n'est vérifiée que par

$$p = 7, \quad P = x^2 + xy + y^2.$$

Solution. — Si l'équation (1) est identique, x et y étant quelconques, elle le sera pour $x = 1$, $y = 1$. Mais alors cette équation prend la forme

$$2^{p-1} - 1 = p.N^2, \tag{2}$$

N étant un *nombre entier*.

Celle-ci exige que

$$p = 7, \quad N = 3 \text{ [1]}.$$

---

[1] *Mathesis*, t. III, p. 41 et 81.

L'équation

$$2^{p-1} - 1 = p.N^2 \tag{2}$$

Remarques. — I. En 1881, j'ai proposé, dans *Mathesis,* la question suivante :

D'après le théorème de Fermat,

$$2^{p-1} - 1 = pN.$$

Comment doit-on prendre le nombre premier p, *pour que* N *soit un carré?*

Si mes souvenirs sont exacts, la solution due à M. Édouard Lucas, publiée dans ce Recueil, diffère peu de celle que j'avais trouvée de mon côté.

II. Lorsque $p = 7$, l'équation (1) se réduit, tout de suite, à

$$x^5 + 3x^4y + 5x^3y^2 + 5x^2y^3 + 3xy^4 + y^5 = (x+y)P^2;$$

puis à

$$x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 = P^2;$$

etc.

III. En général,

$$\begin{aligned}\frac{(x+y)^p - x^p - y^p}{xy(x+y)} &= [C_{p-1,1} + 1]x^{p-3} + [C_{p-1,2} - 1]x^{p-4}y \\ &+ [C_{p-1,3} + 1]x^{p-5}y^2 + \ldots + [C_{p-1,1} + 1]y^{p-3}.\end{aligned}$$

Et si, comme on l'a supposé, p est un nombre premier, *tous les coefficients,* dans le second membre, *sont divisibles par* p [1].

---

est vérifiée par $p = 3$, $N = 1$. Mais cette valeur de p ne conduit pas à une solution de l'équation (1) proposée, car elle donne $P^2 = 1$.

Il faut donc admettre l'inégalité $p > 3$.

En supposant $p > 3$, on trouve la solution $p = 7$ au moyen d'un calcul qui ne présente aucune difficulté (*voir* p. 523). (G.)

[1] Proposition connue, évidente à l'inspection du polynôme

$$\frac{p}{1}x^{p-1}y + \frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}y^2 + \ldots + \frac{p}{1}xy^{p-1}.$$

Si, par exemple, $p = 11$, on trouve

$$\frac{(x+y)^{11} - x^{11} - y^{11}}{xy(x+y)} = 11x^8 + 44x^7y + 121x^6y^2 + 209x^5y^3 + 253x^4y^4 + 209x^3y^5 + 121x^2y^6 + 44xy^7 + 11y^8,$$

ou

$$\frac{(x+y)^{11} - x^{11} - y^{11}}{11xy(x+y)} = x^8 + 4x^7y + 11x^6y^2 + 19x^5y^3 + 23x^4y^4 + 19x^3y^5 + 11x^2y^6 + 4xy^7 + y^8.$$

IV. Plus généralement,

$$\begin{aligned}&\frac{(x+y+z)^p - x^p - y^p - z^p}{(x+y)(y+z)(z+x)}\\ &= (x+y+z)^{p-3} + H_1(x+y+z)^{p-4}\\ &\quad + H_2(x+y+z)^{p-5} + \ldots + H_{p-3} + 2H_{\frac{p-3}{2}}(x^2, y^2, z^2).\end{aligned}$$

Dans le second membre, H_1, H_2, ..., H_{p-3} sont des polynômes *homogènes*, dont tous les coefficients sont égaux à l'unité; savoir :

$$H_1 = x+y+z, \quad H_2 = x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy, \quad \ldots.$$

En particulier,

$$\begin{aligned}&\frac{(x+y+z)^7 - x^7 - y^7 - z^7}{(x+y)(y+z)(z+x)}\\ &= (x+y+z)^4 + (x+y+z)(x+y+z)^3\\ &\quad + (x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy)(x+y+z)^2\\ &\quad + (x^3+y^3+z^3+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2+x^2y+xy^2+xyz)(x+y+z)\\ &\quad + x^4+y^4+z^4+y^3z+yz^3+z^3x+zx^3+x^3y+xy^3\\ &\quad + x^2yz+y^2zx+z^2xy+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2\\ &\quad + 2(x^4+y^4+z^4+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)\ (^1).\end{aligned}$$

V. D'après une formule connue ([2]), les nombres de termes des polynômes

$$H_1, H_2, H_3, \ldots, H_{p-4}, H_{p-3}, H_{\frac{p-3}{2}}$$

([1]) *Mélanges mathématiques*, t. I, p. 182.

([2]) *Cours d'Analyse de l'Université de Liège*, p. 44.

sont, respectivement,

$$3,\ 6,\ 10,\ \ldots,\ \tfrac{1}{2}(p-2)(p-3),\ \tfrac{1}{2}(p-1)(p-2),\ \tfrac{1}{8}(p+1)(p-1).$$

Donc, si l'on suppose $x=y=z=1$, on aura

$$\tfrac{3}{8}(3^{p-1}-1) = 3^{p-3} + 3.3^{p-4} + 6.3^{p-5} + \ldots + \tfrac{1}{2}(p-2)(p-3).3 + \tfrac{1}{2}(p-1)(p-2) + \tfrac{1}{4}(p+1)(p-1);$$

puis, comme le dernier binôme égale $\frac{3}{4}(p-1)^2$:

$$\tfrac{1}{8}(3^{p-1}-1) = 3^{p-4} + 3.3^{p-5} + 6.3^{p-6} + \ldots + \tfrac{1}{2}(p-2)(p-3) + \tfrac{1}{4}(p-1)^2.$$

VI. En vertu du théorème de Fermat, le premier membre est divisible par p [1]. Le second membre jouit donc de la même propriété, laquelle n'est, peut-être, pas évidente *a priori*.

Note. — La même question a été résolue par MM. J. Neuberg, Moret-Blanc; Juhel-Renoy.

NOTE.

Sur la *résolution en nombres entiers et positifs de l'équation*

$$(1)\qquad 2^{p-1} - 1 = p.N^2,$$

où p représente un nombre premier, plus grand que 3.

L'équation (1) proposée revient à

$$(2)\qquad \left(2^{\frac{p-1}{2}}+1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}}-1\right) = p.N^2.$$

Les deux facteurs $\left(2^{\frac{p-1}{2}}+1\right)$, $\left(2^{\frac{p-1}{2}}-1\right)$ sont premiers entre eux, parce qu'ils sont impairs et que leur différence est 2. Par conséquent, il faut, d'après l'équa-

[1] On suppose $p > 3$.

tion (2), que l'un d'eux soit carré exact, et l'autre, le produit d'un carré par le nombre premier p.

Or, c'est, nécessairement, le premier facteur $\left(2^{\frac{p-1}{2}}+1\right)$ qui doit être un carré exact, car le second, $2^{\frac{p-1}{2}}-1$, est un nombre de la forme $4n+3$.

Soit donc

$$2^{\frac{p-1}{2}}+1=\mathrm{M}^2;$$

d'où

$$2^{\frac{p-1}{2}}=\mathrm{M}^2-1=(\mathrm{M}+1)(\mathrm{M}-1).$$

Il est évident que $\mathrm{M}+1$ et $\mathrm{M}-1$ sont des puissances du nombre 2. Et il résulte de l'identité $(\mathrm{M}+1)-(\mathrm{M}-1)=2$ que $(\mathrm{M}-1)$ ne peut être une puissance de 2 supérieure à la première. Donc

$$\mathrm{M}-1=2; \quad \mathrm{M}=3; \quad \mathrm{M}^2-1=8=2^3;$$

et, par suite,

$$2^{\frac{p-1}{2}}=2^3, \quad \frac{p-1}{2}=3, \quad p=7.$$

C'est ce qu'il fallait trouver.

Question 1500

(voir 3^e série, t. III, p. 400);

Les projections orthogonales d'un point quelconque d'une hyperbole équilatère sur les côtés d'un triangle inscrit déterminent une circonférence qui passe par le centre de la courbe. (P. Terrier.)

Note de M. H. Brocard.

Cette proposition n'est pas nouvelle. On la trouve énoncée et démontrée par Bobillier, dans un *Mémoire sur l'hyperbole équilatère,* inséré au t. XIX (juin 1829) des *Annales de Gergonne,* p. 349-359.

La démonstration est fondée sur la propriété de l'hyperbole équilatère d'avoir pour polaire réciproque, par rapport à un cercle directeur de rayon arbitraire, ayant son centre sur le périmètre de la courbe, une parabole admettant pour directrice la tangente menée à l'hyperbole par le centre du cercle, et pour foyer, le pôle du diamètre non transverse de cette hyperbole, perpendiculaire à celui qui va au centre de ce cercle (p. 353).

L'axe et le sommet de cette parabole peuvent être aisément déterminés (p. 354).

Le Mémoire de Bobillier renferme plusieurs théorèmes, dont quelques-uns, retrouvés par d'autres géomètres, ont servi de base à d'intéressantes recherches.

On peut citer, par exemple, les suivants :

L'hyperbole équilatère est sa propre polaire réciproque, par rapport au cercle concentrique bitangent (p. 350).

Si un rectangle a ses côtés respectivement parallèles aux asymptotes d'une hyperbole équilatère, et deux sommets opposés sur cette courbe, la diagonale qui joint les deux sommets restants passe par le centre de l'hyperbole (p. 358).

Ce théorème a été rencontré aussi par M. P.-H. Schoute, qui a donné au rectangle ainsi défini le nom de *rectangle asymptotique,* et en a déduit de nombreuses notions relatives à une certaine courbe, du quatrième ordre, douée de trois points doubles (voir *Bulletin des Sciences mathématiques,* t. XIX, p. 278-280, 1884, et *Congrès de Blois,* p. 42-47, 1884).

Bobillier n'a pas manqué de généraliser les résultats qui précèdent, et de les étendre à une conique quelconque (p. 358), mais il vaut mieux les étudier dans le Mémoire original.

Question 1518

(voir 3e série, t. III, p. 544);

PAR M. J. RICHARD,
Élève de l'École Normale supérieure.

Trouver une courbe plane telle que la projection de son rayon de courbure en un point M, *sur une droite fixe du plan, soit proportionnelle à la partie de la tangente au point* M, *comprise entre ce point et la droite fixe.*

Soient x et y les coordonnées du point M de la courbe cherchée, la droite fixe étant prise pour axe des x; soit α l'angle de la tangente en M avec l'axe des x; s la différentielle de l'arc au point M.

On sait que le rayon de courbure a pour expression $\frac{ds}{d\alpha}$; ce rayon étant perpendiculaire à la tangente en M, sa projection sur l'axe des x est égale à $\frac{ds}{d\alpha}\sin\alpha$; or, $ds\sin\alpha = dy$: donc cette projection a pour valeur $\frac{dy}{d\alpha}$.

D'autre part, la partie de la tangente comprise entre le point M et l'axe des x est évidemment égale à $\frac{y}{\sin\alpha}$; donc on doit avoir, $\frac{1}{n}$ désignant une constante,

$$\frac{dy}{d\alpha} = \frac{1}{n}\,\frac{y}{\sin\alpha}$$

ou

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{n}\,\frac{d\alpha}{\sin\alpha};$$

d'où, en intégrant, et désignant par $\frac{1}{n}\log C$ la constante arbitraire,

$$\log y = \frac{1}{n}\log\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{n}\log C.$$

et, par suite,

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = Cy^n.$$

On a, d'ailleurs,

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\alpha$$

ou bien

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tang}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Remplaçant, dans cette équation, $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$ par sa valeur, il vient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2Cy^n}{1-C^2y^{2n}},$$

d'où

$$dx = \frac{dy}{2}\left(\frac{1-C^2y^{2n}}{Cy^n}\right)$$

ou bien

$$dx = \frac{dy}{2}\left(\frac{1}{C}y^{-n} - Cy^n\right);$$

et, en intégrant et désignant par x_0 la constante arbitraire,

$$x - x_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C}\frac{y^{1-n}}{1-n} - \frac{Cy^{1+n}}{1+n}\right).$$

Toutefois cela suppose $n \gtrless 1$; si $n = 1$, on a

$$x - x_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C}\log y - C\frac{y^2}{2}\right).$$

La courbe proposée est précisément celle que l'on trouverait en résolvant la question suivante :

Un point mobile parcourt une droite OX *d'un mouvement uniforme; il est poursuivi par un autre mobile qui se dirige constamment vers lui. Le rapport des deux vitesses est n : trouver la courbe décrite par le second mobile.*

En d'autres termes, la courbe que nous venons de considérer est une courbe de poursuite.

La même question a été résolue par MM. Juhel-Renoy, Moret-Blanc, Launoy, Bassani, d'Ocagne.

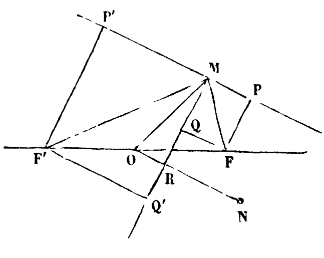
Question 1535

(voir 3e série, t. IV, p. 391),

PAR M. JUHEL-RÉNOY.

Le produit des distances des foyers d'une ellipse à une normale à cette courbe est égal au carré du demi-diamètre perpendiculaire à cette normale, moins le carré du demi petit axe. (D'OCAGNE.)

Soient F, F′ les foyers, O le centre d'une ellipse; MP et MQ la tangente et la normale, en M, à la courbe; Q et Q′ les pieds des perpendiculaires abaissées de F et F′



sur la normale; P et P′ les projections de F et F′ sur la tangente; R la projection du centre O sur la normale; soit enfin α l'angle de la tangente et du rayon vecteur MF.

On a

$$PF = QF \tan g\,\alpha,$$
$$P'F' = Q'F' \tan g\,\alpha.$$

Or, le produit des perpendiculaires abaissées des foyers sur une tangente égale le carré du demi petit axe : donc

$$QF.Q'F' = b^2 \cot^2\alpha = \frac{b^2}{\sin^2\alpha} - b^2.$$

Soit N le point où le diamètre OR coupe l'ellipse. Le second théorème d'Apollonius fournit la relation

$$MR.ON = ab.$$

Or, R étant le milieu de QQ',

$$2MR = MQ + MQ' = (MF + MF')\sin\alpha = 2a\sin\alpha;$$

par suite,

$$a.ON\sin\alpha = ab,$$

d'où

$$ON = \frac{b}{\sin\alpha},$$

et finalement

$$QF.Q'F' = \overline{ON}^2 - b^2,$$

ce qui démontre la proposition ([1]).

La Géométrie analytique conduit au même résultat.

([1]) La proposition énoncée est un corollaire du théorème suivant, qui est connu :

Le produit MF.MF' *des rayons vecteurs, menés d'un point* M *de l'ellipse aux deux foyers, est égal au carré du rayon* ON *perpendiculaire à la normale au point* M.

Cela admis, soient f, f' les rayons vecteurs MF, MF'; M l'angle FMF'; p le demi-périmètre $a+c$ du triangle FMF'. On a, évidemment,

$$QF.Q'F' = f.f'.\sin^2\frac{M}{2}.$$

Mais, d'après une formule de la Trigonométrie,

$$ff'\sin^2\frac{M}{2} = (p-f)(p-f') = p^2 - p(f+f') + ff'.$$

Donc

$$QF.Q'F' = (a+c)^2 - (a+c)\times 2a + ff' = -b^2 + ff' = \overline{ON}^2 - b^2.$$

C. Q. F. D.

(G.)

Soit, en effet,

$$bY\cos\varphi - aX\sin\varphi + c^2\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

l'équation de la normale en M.

Le produit des distances des foyers à cette normale sera, en remarquant que les foyers sont situés de part et d'autre de la normale,

$$\frac{-c^2(c\cos\varphi - a)(c\cos\varphi + a)\sin^2\varphi}{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi} = c^2\sin^2\varphi,$$

$$c^2\sin^2\varphi = a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi - b^2.$$

Or $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ étant les coordonnées du point M, les coordonnées de l'extrémité du diamètre conjugué à OM, c'est-à-dire perpendiculaire à la normale en M, sont $-a\sin\varphi$, $-b\cos\varphi$, et, par suite, le carré de ce demi-diamètre est

$$a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi.$$

La proposition est donc démontrée.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc et M. Bassani, professeur au lycée, à Padoue.

Question 1537

(voir 3e série, t. IV, p. 391);

Par M. H. BASSANI,
Professeur au lycée de Padoue (Sicile).

On considère les pieds des quatre normales menées d'un même point à une ellipse : démontrer que le rapport de la moyenne géométrique des abscisses de ces quatre pieds à leur moyenne arithmétique est constant et égal au demi grand axe de l'ellipse. Le même rap-

port, relatif aux ordonnées, est égal au demi petit axe (¹). (Barisien.)

Désignons par $a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$ l'équation de l'ellipse, et par x_0, y_0 les coordonnées d'un point P; d'où l'on mène les normales à la courbe.

Soient x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4 les coordonnées des pieds des quatre normales menées du point P. L'équation de l'hyperbole passant par ces quatre points sera

$$a^2x_0y - b^2y_0x - c^2xy = 0.$$

Si l'on élimine x, ou y, entre ces deux équations, on obtient une équation en x, ou en y, du quatrième degré, qui donne les abscisses, ou les ordonnées, des pieds des quatre normales.

On trouve, pour les deux cas,

$$c^4x^4 - 2a^2c^2x_0x^3 + \ldots - a^6x_0^2 = 0, \tag{1}$$

$$c^4y^4 + 2b^2c^2y_0y^3 + \ldots - b^6y_0^2 = 0; \tag{2}$$

d'où l'on tire

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{2a^2x_0}{c^2} \quad \text{et} \quad x_1x_2x_3x_4 = -\frac{a^6x_0^2}{c^4},$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = -\frac{2b^2y_0}{c^2} \quad \text{et} \quad y_1y_2y_3y_4 = -\frac{b^6y_0^2}{c^4},$$

et, par suite,

$$\sqrt{x_1x_2x_3x_4} = \frac{a^3x_0}{c^2}, \quad \sqrt{y_1y_2y_3y_4} = \frac{b^3y_0}{c^2} \ (^2).$$

Ce qui donne

$$\frac{\sqrt{x_1x_2x_3x_4}}{\dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2}} = a \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{y_1y_2y_3y_4}}{\dfrac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{2}} = b.$$

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

(¹) On entend ici par moyenne géométrique la racine carrée du produit des quatre quantités considérées, et par moyenne arithmétique leur demi-somme.

(²) En valeurs absolues, c'est-à-dire sans avoir égard aux signes.

Question 1543
(voir 2ᵉ série, t. IV, p. 392);

PAR UN ANONYME.

On donne l'une des deux asymptotes d'une hyperbole équilatère, une tangente, et un point de la courbe : déterminer le centre et les autres éléments de la courbe. (Construction géométrique.)

La solution suivante s'appuie sur cette proposition :

Les projections d'un point quelconque d'une hyperbole équilatère, sur une tangente et sur la droite menée du centre au point de contact, sont à égale distance du centre de la courbe.

Cela admis, soient OX et CM l'asymptote et la tangente données; P le point donné sur l'hyperbole; O le centre de la courbe; M le point de contact de la tangente CM, et C le point d'intersection de l'asymptote et de la tangente (¹).

Les droites OM, CM étant égales entre elles, l'angle $MOC = MCO$; cette égalité fait connaître la direction de la droite OM, et, par suite, la perpendiculaire PA abaissée du point P sur la droite OM est déterminée de position.

Soient encore PB la perpendiculaire menée à la tangente CM par le point P, et B' le symétrique du point B, par rapport à l'asymptote OX.

On a d'abord

$$OB' = OB;$$

puis

$$OB = OA,$$

d'après la proposition énoncée.

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure.

Or l'égalité des trois droites OB′, OB, OA montre que O est le centre d'une circonférence tangente à la droite PA en A, et passant par les deux points B′, B. La détermination du centre de l'hyperbole est ainsi ramenée à cette question de Géométrie élémentaire, dont la solution est bien connue : Faire passer par deux points donnés une circonférence tangente à une droite.

Le centre O de l'hyperbole étant ainsi obtenu, on élèvera en ce point à l'asymptote OX une perpendiculaire OY qui sera la seconde asymptote de l'hyperbole, et l'on sait comment on détermine les axes d'une hyperbole dont on connaît un point et les deux asymptotes.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1544

(voir 3e série, t. IV, p. 392),

PAR M. MORET-BLANC.

On donne une parabole et un point dans son plan; par ce point on mène une sécante quelconque, et, sur la corde ainsi déterminée, prise comme diamètre, on décrit un cercle. Trouver l'enveloppe de la polaire du sommet de la parabole, par rapport à ce cercle.

(WOLSTENHOLME.)

Soient $y^2 = 2px$ l'équation de la parabole; α, β les coordonnées du point donné; $y - \beta = m(x - \alpha)$ sera l'équation de la sécante.

Éliminant x entre ces deux équations, on a, pour déterminer les ordonnées des extrémités de la corde interceptée,

$$my^2 - 2py + 2p(\beta - m\alpha) = 0,$$

équation dont les racines y', y'' sont déterminées par

$$y=\frac{p\pm\sqrt{p^2-2pm(\beta-m\alpha)}}{m}.$$

On a ensuite

$$\frac{y'+y''}{2}=\frac{p}{m}=y_1,$$

$$\frac{y'-y''}{2}=\frac{\sqrt{p^2-2pm(\beta-m\alpha)}}{m},$$

$$\frac{y'^2-y''^2}{4p}=\frac{x'-x''}{2}=\frac{\sqrt{p^2-2pm(\beta-m\alpha)}}{m^2},$$

$$\frac{x'+x''}{2}=\frac{y_1-(\beta-m\alpha)}{m}=\frac{p-m(\beta-m\alpha)}{m^2}=x_1.$$

L'équation de la circonférence décrite sur la corde considérée, comme diamètre, est

$$x^2+y^2-2x_1x-2y_1y+x_1^2+y_1^2-r^2=0,$$

et celle de la polaire de l'origine, sommet de la parabole :

$$x_1x+y_1y-x_1^2-y_1^2+r^2=0,$$

$$r^2=\left(\frac{x'-x''}{2}\right)^2+\left(\frac{y'-y''}{2}\right)^2=\frac{[(1+m^2)(p^2-2pm(\beta-m\alpha)]}{m^4}.$$

Remplaçant x_1, y_1 et r^2 par leurs valeurs, multipliant par m^2, et réduisant, l'équation de la polaire devient

$$(p-\beta m+\alpha m^2)x+pmy-(\beta-m\alpha)^2-2pm(\beta-m\alpha)=0$$

ou, en ordonnant par rapport à m,

$$(1)\quad (\alpha x+2p\alpha-\alpha^2)m^2+(py-\beta x+2\alpha\beta-2p\beta)m+px-\beta^2=0.$$

On aura l'équation de l'enveloppe, en éliminant m entre cette équation et sa dérivée par rapport à m,

$$(2)\quad 2(\alpha x+2p\alpha-\alpha^2)m+py-\beta x+2\alpha\beta-2p\beta=0.$$

Ajoutant ces équations multipliées, respectivement, par 2 et $-m$, on a

$$(3)\qquad (py-\beta x+2\alpha\beta-2p\beta)m+2(px-\beta^2)=0.$$

Enfin, l'élimination de m entre les équations (2) et (3) donne

$$(py - \beta x + 2\alpha\beta - 2p\beta)^2 - 4\alpha(x + 2p - \alpha)(px - \beta^2) = 0.$$

La courbe, représentée par cette dernière équation, est une ellipse, ou une hyperbole, suivant que l'on a $\alpha < 0$, ou $\alpha > 0$.

Si $\alpha = 0$, la polaire passe par le point fixe

$$x = \frac{\beta^2}{p}, \quad y = 2\beta + \frac{\beta^3}{p^2}.$$

Son enveloppe se réduit à ce point.

Dans le cas général, la courbe est tangente aux droites $x = \alpha - 2p$ et $x = \frac{\beta^2}{p}$; la corde de contact est la droite représentée par l'équation

$$py - \beta x + 2\alpha\beta - 2p\beta = 0.$$