Nouvelles annales de mathématiques

E. Barisien

Composition mathématique pour l'admission à l'École centrale en 1884 (seconde session, octobre)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 502-509

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__502_1>

COMPOSITION MATHÉMATIQUE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1884 (SECONDE SESSION, OCTOBRE);

SOLUTION PAR M. E. BARISIEN.

On donne, dans un plan, deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, *et une droite quelconque coupant ces axes, respectivement, aux points* A *et* B.

On prend sur cette droite un point m dont les coordonnées sont α *et* β, *et l'on construit, dans le plan, un point correspondant* M *ayant pour coordonnées*

$$x = \frac{f^2}{\alpha}, \quad y = \frac{g^2}{\beta},$$

f et g étant deux longueurs constantes données.

Cela posé :

1° *On demande d'écrire l'équation du lieu des points* M, *lorsque le point m se déplace sur la droite indéfinie* AB. *Ce lieu est une hyperbole qu'on désignera, dans ce qui va suivre, par la lettre* H.

2° *On demande de déterminer les éléments nécessaires à la définition complète de cette hyperbole* H, *et d'en construire géométriquement un point quelconque, ainsi que la tangente en ce point.*

3° *On suppose que la droite* AB *se déplace dans le plan, de telle façon que la somme des inverses de ses coordonnées à l'origine reste constante, soit de façon que*

$$\frac{1}{\mathrm{OA}} + \frac{1}{\mathrm{OB}} = \frac{1}{l} = \text{const.}$$

A chaque position de la droite répondra une hyperbole H.

On demande de montrer que toutes ces hyperboles ont une corde commune, et de trouver le lieu des pôles de cette corde relativement aux diverses hyperboles (c'est-à-dire le lieu des points pour lesquels elle est corde de contact des tangentes menées de ce point à l'une des hyperboles).

4° *On projette le centre* C *de l'hyperbole* H *répondant à la droite* AB, *sur cette droite, en* D, *et l'on demande de trouver le lieu des points* D *lorsque la droite* AB *se déplace, non plus selon la loi ci-dessus définie, mais en restant parallèle à elle-même.*

I.

Soient $OA = a$, $OB = b$ (*fig.* 1). L'équation de la droite AB est

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Exprimant que le point $m(\alpha, \beta)$ est sur cette droite, on a

$$(1) \qquad \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} = 1.$$

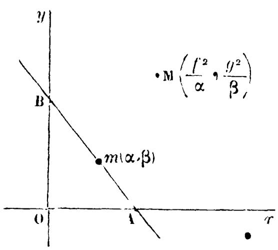
Les coordonnées du point M étant

$$(2) \qquad x = \frac{f^2}{\alpha},$$

$$(3) \qquad y = \frac{g^2}{\beta},$$

l'équation du lieu du point M s'obtiendra en éliminant α

Fig. 1.



et β entre les équations (1), (2) et (3). Cette élimination se fait avec la plus grande facilité, et donne pour résultat

$$xy = \frac{g^2}{b} x + \frac{f^2}{a} y,$$

équation de l'hyperbole (H).

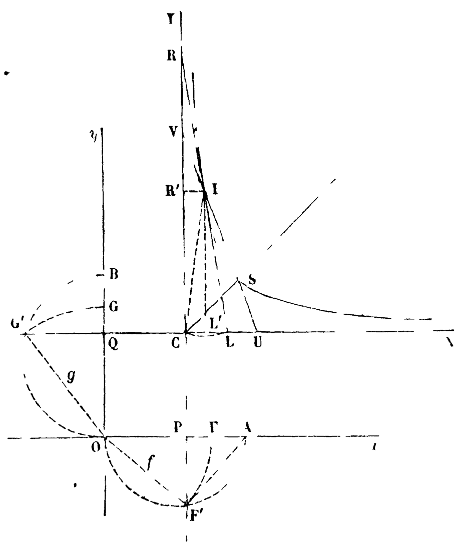
II.

L'hyperbole H a ses asymptotes parallèles aux axes Ox et Oy; elles ont pour équations

$$x = \frac{f^2}{a}, \quad y = \frac{g^2}{b}.$$

Pour construire ces asymptotes, prenons sur Ox (*fig.* 2) une longueur OF $= f$, et sur Oy une longueur OG $= g$. Décrivons sur OA et OB des demi-circonférences; rabattons les points F et G sur ces demi-circonférences,

Fig. 2.



en F′ et G′, par des arcs de cercle de centre O, et abaissons F′P et G′Q perpendiculaires, respectivement, à Ox et Oy. Ces deux droites qui se coupent au point C sont les asymptotes CX et CY de l'hyperbole H (¹). Rapportons, momentanément, l'hyperbole aux axes CX et CY : les formules de transformation de coordonnées sont

$$x = X + \frac{f^2}{a},$$

$$y = Y + \frac{g^2}{b},$$

et l'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes devient alors

$$\left(X + \frac{f^2}{a}\right)\left(Y + \frac{g^2}{b}\right) = \frac{g^2}{b}\left(X + \frac{f^2}{a}\right) + \frac{f^2}{a}\left(Y + \frac{g^2}{b}\right),$$

qui se réduit à

$$XY = \frac{f^2 g^2}{ab}.$$

Or

$$OP = \frac{f^2}{a}, \quad OQ = \frac{g^2}{b} :$$

donc

$$XY = OP \times OQ.$$

Posons

$$k = \sqrt{OP.OQ},$$

l'hyperbole aura pour équation $XY = k^2$; rien n'est plus facile que de construire k.

Si A représente le demi-axe transverse de cette hyperbole, on sait que

$$k^2 = \frac{A^2}{2},$$

d'où

$$A = k\sqrt{2}.$$

En portant sur la bissectrice de l'angle XCY une longueur CS = A, on aura un des sommets de l'hyperbole.

Pour avoir un point quelconque I de l'hyperbole,

(¹) Les inégalités $f < a$, $g < b$ sont implicitement admises dans cette construction géométrique.

d'après une propriété connue, il suffit de mener une droite SUV rencontrant CX et CY en U et V, et de prendre VI = SU dans l'intérieur de l'angle XCY.

En joignant I, C et prenant IL = IC, le point L étant sur CX, la droite ILR sera la tangente en I, car alors IL = IR, la droite ILR coupant CY en R. C'est encore une propriété connue de la tangente à l'hyperbole.

III.

D'après l'énoncé, nous avons la relation

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{l}. \tag{4}$$

Écrivons, de nouveau, l'équation de l'hyperbole H rapportée aux axes Ox et Oy :

$$xy = \frac{g^2}{b}x + \frac{f^2}{a}y. \tag{H}$$

De l'équation (4) nous tirons

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{l} - \frac{1}{a},$$

et, par suite, l'équation de (H) devient

$$xy = g^2 x\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{a}\right) + \frac{f^2}{a}y,$$

ou

$$x\left(y - \frac{g^2}{l}\right) = \frac{1}{a}(f^2 y - g^2 x).$$

Donc l'hyperbole H passe, quel que soit a, par l'intersection des deux lignes que les équations

$$x\left(y - \frac{g^2}{l}\right) = 0, \quad f^2 y - g^2 x = 0$$

représentent, c'est-à-dire par les deux points dont les coordonnées sont

$$x = 0, \quad y = 0 \quad \text{et} \quad x = \frac{f^2}{l}, \quad y = \frac{g^2}{l}.$$

La corde commune à toutes les hyperboles H est la droite qui unit ces deux points, et qui a pour équation

$$(5) \qquad f^2 y - g^2 x = 0.$$

L'équation de la polaire d'un point (X, Y), par rapport à l'hyperbole (H), est

$$(6) \qquad ax(bY - g^2) + by(aX - f^2) = ag^2 X + bf^2 Y.$$

Pour exprimer que la droite (5) est la polaire du point (X, Y), il faut identifier les équations (5) et (6); ce qui donne

$$\frac{a(bY - g^2)}{g^2} = -\frac{b(aX - f^2)}{f^2} \quad \text{et} \quad ag^2 X + bf^2 Y = 0.$$

Ces deux relations peuvent s'écrire

$$(6) \qquad \frac{X}{f^2} + \frac{Y}{g^2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

$$(7) \qquad ag^2 X + bf^2 Y = 0.$$

Pour avoir l'équation du lieu des points (X, Y), il faut éliminer a et b entre (4), (6) et (7). Cette élimination se fait immédiatement en comparant les équations (4) et (6); le lieu des pôles de la droite (5) est donc la droite qui a pour équation

$$\frac{X}{f^2} + \frac{Y}{g^2} = \frac{1}{l}.$$

IV.

L'équation de la droite CD passant par le centre de l'hyperbole H, et perpendiculairement à AB, est

$$\left(X - \frac{f^2}{a}\right)\frac{1}{b} - \left(Y - \frac{g^2}{b}\right)\frac{1}{a} = 0$$

ou

(8) $$aX - bY = f^2 - g^2.$$

L'équation de AB est

(9) $$\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = 1.$$

Si AB se déplace parallèlement à une direction donnée, de coefficient angulaire m, on a $m = -\frac{b}{a}$, ou

(10) $$b = -ma.$$

On aura le lieu des points D en éliminant a et b entre (8), (9) et (10).

Remplaçant b par $-ma$ dans (9) et (8), il vient

$$\frac{1}{a}\left(X - \frac{Y}{m}\right) = 1,$$

$$a(X + mY) = f^2 - g^2.$$

Multiplions, membre à membre, ces dernières équations, nous avons, pour le lieu des points D, la courbe représentée par l'équation

$$(mX - Y)(X + mY) = m(f^2 - g^2).$$

C'est une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes les deux droites

$$Y = mX,$$

$$Y = -\frac{1}{m}X \text{ [1]}.$$

---

[1] On peut remarquer que toutes les hyperboles équilatères obtenues en faisant varier le coefficient angulaire m passent par deux points fixes situés sur l'un des deux axes de coordonnées. Car, en posant $X = 0$, ou $Y = 0$, l'équation

$$(mX - Y)(X + mY) = m(f^2 - g^2)$$

donne $Y = \pm\sqrt{-(f^2 - g^2)}$, ou $X = \pm\sqrt{f^2 - g^2}$, valeurs indépendantes de m. Si $f = g$, les deux points coïncident avec l'origine des coordonnées; mais, dans ce cas, l'hyperbole se réduit aux deux asymptotes.