NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JUHEL-RÉNOY

Composition mathématique pour l'admission à l'École polytechnique en 1885, solution analytique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 498-502

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__498_1>

COMPOSITION MATHÉMATIQUE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1885;

SOLUTION ANALYTIQUE

PAR M. JUHEL-RÉNOY.

Par les deux foyers d'une ellipse fixe, on fait passer une circonférence variable :

1° *A quelle condition doit satisfaire cette ellipse* *pour que la circonférence puisse réellement la rencontrer en quatre points, et dans quelle portion du petit axe doit-on placer le centre du cercle pour qu'il y ait effectivement quatre points réels d'intersection?*

2° *En chacun des points d'intersection, on mène la tangente à l'ellipse; ces quatre droites forment un quadrilatère; quel est le lieu des sommets de ce quadrilatère quand le cercle varie?*

3° *Quel est le lieu de l'intersection des côtés de ce quadrilatère avec ceux d'un autre quadrilatère symétrique du premier par rapport au centre de l'ellipse?*

4° *On considère les tangentes communes au cercle et à l'ellipse. Trouver le lieu de leurs points de contact avec le cercle.*

1° Soient

$$a^2 Y^2 + b^2 X^2 - a^2 b^2 = 0,$$
$$X^2 + Y^2 - 2\alpha Y - c^2 = 0$$

les équations de l'ellipse et du cercle, α étant un paramètre variable. L'équation des cordes d'intersection sera

$$(1) \qquad c^2 Y^2 + 2 b^2 \alpha Y - b^4 = 0.$$

Écrivons que les quatre points d'intersection sont réels, c'est-à-dire que cette équation a ses racines comprises entre b et $-b$, nous aurons les conditions

$$c^2 - b^2 > 2 b \alpha > -(c^2 - b^2);$$

la condition relative à l'ellipse est donc $c > b$. Cette condition étant supposée remplie, l'ordonnée du centre du cercle pourra varier entre $\dfrac{c^2 - b^2}{2b}$ et $-\dfrac{c^2 - b^2}{2b}$.

2° Soient A, B, C, D les côtés du premier quadrilatère. Les côtés A et B, C et D se coupent sur le petit axe, qui forme ainsi une partie du lieu. Soit β l'ordonnée du point d'intersection des côtés A et B. L'équation de ces côtés sera

$$(2)\qquad (\beta^2 - b^2)(a^2Y^2 + b^2X^2 - a^2b^2) = a^2(\beta Y - b^2)^2.$$

La corde des contacts avec l'ellipse sera donnée par l'une des racines de l'équation

$$c^2Y^2 + 2b^2\alpha Y - b^4 = 0.$$

L'équation qui donne les pôles de ces droites s'obtient en changeant Y en $\frac{b^2}{Y}$: elle est donc

$$c^2 - 2\alpha Y - Y^2 = 0.$$

Mais β doit être racine de cette équation, par conséquent

$$(3)\qquad \beta^2 - 2\alpha\beta - c^2 = 0.$$

Or, supposons que, dans l'équation (2), X, Y soient les coordonnées du point d'intersection, soit de A et D, ou A et C, soit de B et D, ou B et C. L'équation (2) donnera les ordonnées des points où ces côtés coupent le petit axe. Elle sera donc identique à l'équation (3). Écrivons donc que le produit des racines de l'équation (2) en β est égal à $-c^2$. Nous aurons le lieu représenté par l'équation

$$a^2Y^2 + b^2X^2 = c^2(X^2 - a^2)$$

ou

$$a^2Y^2 - (c^2 - b^2)X^2 = -a^2c^2,$$

équation d'une hyperbole rapportée aux mêmes axes de coordonnées que l'ellipse, et dont l'axe transverse est dirigé suivant le grand axe de l'ellipse.

3° Soient A', B', C', D' les symétriques des côtés A, B, C, D par rapport au centre de l'ellipse. Les côtés A et A' sont parallèles, A et B' se coupent sur le grand axe qui constitue une partie du lieu. Supposons que X, Y, dans l'équation (2), soient les coordonnées du point de rencontre de A et C', par exemple. L'équation (2) en β

devra alors avoir les mêmes racines en valeur absolue que dans le second cas, l'une d'elles aura simplement changé de signe. Écrivons donc que le produit des racines est égal à c^2, et nous aurons le lieu représenté par

$$a^2 Y^2 + b^2 X^2 = -c^2(X^2 - a^2)$$

ou

$$X^2 + Y^2 = c^2,$$

équation du cercle décrit du centre de l'ellipse avec la distance focale, c, comme rayon.

4° Soit β l'ordonnée du point d'intersection du petit axe avec une tangente commune à l'ellipse et au cercle. Les équations des tangentes menées au cercle et à l'ellipse, de ce point, sont respectivement

$$(\beta^2 - 2\alpha\beta - c^2)(X^2 + Y^2 - 2\alpha Y - c^2) = (\beta Y - \alpha\beta - \alpha Y - c^2)^2,$$
$$(\beta^2 - b^2)(a^2 Y^2 + b^2 X^2 - a^2 b^2) = a^2(\beta Y - b^2)^2.$$

Identifions les rapports des coefficients de X^2 et de Y^2 de ces deux équations; nous aurons

$$\frac{\beta^2 - b^2}{\beta^2 - 2\alpha\beta - c^2} = \frac{a^2}{c^2 + \alpha^2}$$

ou

$$(\alpha^2 - b^2)\beta^2 + 2a^2\alpha\beta + c^4 - b^2\alpha^2 = 0.$$

En supposant la quantité $\alpha^2 - b^2$ différente de zéro, cette équation donne

$$(\alpha^2 - b^2)\beta = -a^2\alpha \pm b(\alpha^2 + c^2).$$

Le point de contact avec le cercle est situé sur la polaire, par rapport au cercle, du point dont les coordonnées sont $x = 0$, $y = \beta$: l'équation de cette polaire est

$$\beta Y - \alpha\beta - \alpha Y - c^2 = 0.$$

Donc

$$\beta = \frac{\alpha Y + c^2}{Y - \alpha}$$

et, par suite,

$$(\alpha^2 - b^2)(\alpha Y + c^2) = -(Y - \alpha)a^2\alpha \pm b(\alpha^2 + c^2)(Y - \alpha).$$

Cette équation peut s'écrire

$$\begin{aligned}&[(\alpha^2 - b^2)\alpha + a^2\alpha \mp b(\alpha^2 + c^2)]Y\\ &\quad + c^2(\alpha^2 - b^2) - a^2\alpha^2 \pm b\alpha(\alpha^2 + c^2) = 0\end{aligned}$$

ou

$$(\alpha^2 + c^2)(\alpha \mp b)(Y \mp b) = 0;$$

d'où

$$Y = \pm b.$$

On voit facilement que, en supposant $\alpha^2 = b^2$, on obtient des points du lieu situés, de même, sur les droites $Y^2 = b^2$. En effet, on a alors

$$\beta(Y \mp b) = \pm bY + c^2,$$

et

$$\pm 2a^2 b\beta + c^4 - b^4 = 0$$

ou

$$\pm 2b\beta = b^2 - c^2.$$

En éliminant β entre ces deux équations, on trouve

$$Y = \pm b.$$

Le lieu se compose donc des deux droites $Y^2 = b^2$, c'est-à-dire des tangentes à l'ellipse aux extrémités du petit axe.