Nouvelles annales de mathématiques

J.-B. Pomey

Propriétés élémentaires des faisceaux en involution, et leur application à quelques problèmes relatifs aux courbes du second et du troisième degré

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 489-498

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__489_0>

PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES FAISCEAUX EN INVOLUTION, ET LEUR APPLICATION A QUELQUES PROBLÈMES RELATIFS AUX COURBES DU SECOND ET DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. J.-B. POMEY.

Soient $y = x \operatorname{tang}\alpha$, $y = x \operatorname{tang}\alpha'$ les équations de deux droites passant par l'origine des coordonnées, les axes étant supposés rectangulaires.

Si, entre α et α', il existe la relation

$$(1)\qquad A \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' + B(\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\alpha') + C = 0,$$

où A, B, C sont des constantes, ces deux droites sont dites *rayons correspondants d'une involution*.

L'angle α deviendra égal à l'angle α', et le couple de rayons correspondants sera dit se réduire à un rayon double, pour les valeurs de $\operatorname{tang}\alpha$ racines de l'équation

$$(2)\qquad Ax^2 + 2Bx + C = 0.$$

Si les deux valeurs de $\operatorname{tang}\alpha$ ainsi obtenues sont imaginaires, elles sont conjuguées si A, B, C sont réels. Soient α_1 et α_2 les angles dont les tangentes sont les racines x', x'' de (2). Si l'angle $\alpha_1 + \alpha_2$ est réel, il en sera de même de l'angle $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$, et cela a lieu en réalité, car la formule

$$\operatorname{tang}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\operatorname{tang}\alpha_1 + \operatorname{tang}\alpha_2}{1 - \operatorname{tang}\alpha_1 \operatorname{tang}\alpha_2}$$

ne contient que la somme et le produit de deux quantités imaginaires conjuguées.

Si, dès lors, on prend pour axe des x la direction définie par l'une des valeurs de $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$, l'autre étant

$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \frac{\pi}{2}$, l'équation (1) se changera, comme on le voit aisément, en une relation de la forme

$$A \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' + C = 0.$$

En effet, la nouvelle relation entre $\operatorname{tang}\alpha$ et $\operatorname{tang}\alpha'$ doit encore être du premier degré par rapport à chacune de ces quantités; car si, auparavant, à un rayon $y = x \operatorname{tang}\alpha$ n'en correspondait qu'un seul $y = x \operatorname{tang}\alpha'$, ce n'est pas un changement d'axes qui peut lui en faire correspondre plusieurs. La relation ne doit pas non plus perdre sa symétrie. De plus, la nouvelle équation (2) doit manquer du second terme; car, si l'axe des x est la bissectrice des rayons doubles, les valeurs de x (x' et x''), réelles ou imaginaires, doivent, en tous cas, être égales et de signes contraires.

Soit maintenant $\varphi_2 + \varphi_1 t = 0$ l'équation d'une conique, mise sous forme d'une somme de termes homogènes en x et y, φ_2 du second degré et φ_1 du premier degré, t étant une variable introduite pour l'homogénéité, cette conique passant par l'origine.

Soit alors $mx + ny = t$ l'équation d'une droite. L'équation $\varphi_2 + \varphi_1(mx + ny) = 0$ est l'équation des deux rayons joignant l'origine aux points d'intersection de la droite et de la conique. Soit

$$y = x \operatorname{tang}\alpha, \quad y = x \operatorname{tang}\alpha'$$

ce couple de rayons. On a

$$\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\alpha' = \frac{Am + Bn + C}{A'm + B'n + C'},$$

$$\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' = \frac{A_1 m + B_1 n + C_1}{A'm + B'n + C'},$$

A, B, C, A', B', C', A_1, B_1, C_1 étant des constantes; et si la droite passe par un point fixe, on aura

$$A_2 m + B_2 n + C_2 = 0,$$

A_2, B_2, C_2 étant des constantes.

Éliminons m et n entre ces trois équations, il vient

$$\begin{vmatrix} A' \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' - A & B' \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' - B & C' \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' - C \\ A'(\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\alpha') - A_1 & B'(\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\alpha') - B_1 & C'(\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\alpha') - C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\Sigma A_2 \begin{vmatrix} B' \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' - B & C' \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' - C \\ B'(\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\alpha') - B_1 & C'(\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\alpha') - C_1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou enfin

$$\Sigma \left\{ A_2 \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha'(\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\alpha') \begin{vmatrix} B' & C' \\ B' & C' \end{vmatrix} \right.$$
$$+ A_2 \begin{vmatrix} -B & C' \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' \\ -B_1 & C'(\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\alpha') \end{vmatrix}$$
$$\left. + A_2 \begin{vmatrix} B' \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' & -C \\ B'(\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\alpha') & -C_1 \end{vmatrix} + A_2 \begin{vmatrix} -B & -C \\ -B_1 & -C_1 \end{vmatrix} \right\} = 0.$$

Le premier déterminant $\begin{vmatrix} B' & C' \\ B' & C' \end{vmatrix}$ étant nul, cette relation est de la forme (1), et le couple de rayons fait partie d'une involution. En faisant tourner les axes, la relation (1) peut être ramenée à la forme

$$\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' = \text{const}.$$

Il y a lieu de remarquer que, pour $\alpha = 0$, on a $\alpha' = 90°$, et que les nouveaux axes sont un couple de rayons correspondants rectangulaires. Cela prouve, en passant, que le couple, ordinairement unique, de rayons correspondants rectangulaires est formé par le système des bissectrices des rayons doubles réels ou imaginaires. Si nous supposons que, en dehors de ce couple, il y en ait un autre qui soit rectangulaire, on aura

$$\tang\alpha \tang\alpha' = -1,$$

et la constante devenant égale à -1, tous les couples sont rectangulaires. Mais parmi ces couples rectangulaires se trouve celui qui est formé par la tangente et la normale à la conique. Or cette remarque prouve que le point fixe par où passe la droite $mx + ny = t$ est sur la normale.

Réciproquement, si les deux droites représentées par $\varphi_2 + \varphi_1(mx + ny) = 0$ sont rectangulaires, en remarquant que les coefficients de x^2 et de y^2 sont du premier degré en m et n, on a une condition de la forme

$$\frac{Am + Bn + C}{A'm + B'n + C'} = -1,$$

relation qui, étant du premier degré en m et n, prouve que $mx + ny = t$ passe par un point fixe, lequel est évidemment sur la normale (théorème de Frégier).

Considérons maintenant une courbe du troisième degré à point double. Mettons l'origine au point double, et soit $\varphi_3 + \varphi_2 t = 0$ l'équation de cette courbe mise sous forme d'une somme de termes homogènes en x et y, φ_3 étant du troisième degré, φ_2 du second, et t étant une variable introduite pour l'homogénéité. Si $mx + ny = t$ est une droite quelconque, l'équation

$$\varphi_3 + \varphi_2(mx + ny) = 0$$

est celle des rayons vecteurs menés du point double aux points d'intersection de la droite considérée avec la courbe. Si α, α', α'' sont leurs angles avec l'axe des x et qu'on pose

$$S_1 = \tang\alpha + \tang\alpha' + \tang\alpha'',$$

$$S_2 = \tang\alpha \tang\alpha' + \tang\alpha' \tang\alpha'' + \tang\alpha'' \tang\alpha.$$

$$S_3 = \tang\alpha \tang\alpha' \tang\alpha'',$$

on aura

$$S_1 = \frac{Am + Bn + C}{A'm + B'n + C'},$$

$$S_2 = \frac{A_1 m + B_1 n + C_1}{A'm + B'n + C'},$$

$$S_3 = \frac{A_2 m + B_2 n + C_2}{A'm + B'n + C'},$$

A, B, C, A′, B′, C′, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 étant des constantes qui dépendent de l'équation de la courbe; d'où

$$\begin{vmatrix} A'S_1 - A & A'S_2 - A_1 & A'S_3 - A_2 \\ B'S_1 - B & B'S_2 - B_1 & B'S_3 - B_2 \\ C'S_1 - C & C'S_2 - C_1 & C'S_3 - C_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre se décompose en une somme de déterminants partiels. Le premier

$$\begin{vmatrix} A'S_1 & A'S_2 & A'S_3 \\ B'S_1 & B'S_2 & B'S_3 \\ C'S_1 & C'S_2 & C'S_3 \end{vmatrix}$$

est nul, comme ayant les éléments de ses trois colonnes proportionnels. Les déterminants qui contiennent, dans deux colonnes, respectivement S_1 et S_2 ou S_2 et S_3 ou S_3 et S_1 sont nuls, comme ayant les éléments de deux colonnes proportionnels. Il reste donc une relation de la forme

$$MS_1 + NS_2 + PS_3 + Q = 0,$$

où M, N, P, Q sont des constantes. Si je suppose α'' constant, un des points d'intersection de $mx + ny = t$ ne varie pas, et la relation entre α et α' est une relation d'involution. De plus, on conclut de là que, si, par un point d'une courbe du troisième degré à point double, on peut faire passer deux cordes qui, limitées à leurs deux autres points d'intersection avec la courbe du troisième degré, soient vues du point double sous un angle droit chacune respectivement, il en est de même de toute autre corde. J'ajouterai que ce point existe et qu'il est unique. En effet, la relation d'involution peut prendre la forme $A \tang\alpha \tang\alpha' + C = 0$. Or, comme dans cette relation $\tang\alpha''$ n'entre qu'au premier degré, la condition $A + C = 0$ est du premier degré en $\tang\alpha''$. Il n'y a donc qu'une direction α'', et à cette direction ne correspond qu'un point sur la courbe du troisième degré, puisqu'il est évident qu'on doit faire abstraction du point double lui-même.

Supposons maintenant que l'origine ne soit pas au point double et soit pourtant sur la courbe. On aura pour équation

$$\varphi_3 + \varphi_2 t + \varphi_1 t^2 = 0,$$

φ_3, φ_2, φ_1 étant homogènes en x et y et respectivement des degrés 3, 2, 1. Si je suppose que t y représente le binôme $mx + ny$, cette équation représentera l'ensemble des rayons vecteurs d'intersection de $mx + ny = t$ avec la courbe du troisième degré. Si, entre les inclinaisons de ces rayons vecteurs, il y a la relation

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' = \pi,$$

on aura

$$\tang \alpha + \tang \alpha' + \tang \alpha'' = \tang\alpha \tang\alpha' \tang\alpha'',$$

relation linéaire par rapport aux coefficients de l'équation cubique des rayons vecteurs et, par suite, du second degré en m et n. Il en résulte que la droite $mx + ny = t$ enveloppe une conique.

Si, par un point M d'une conique, on fait pivoter un angle droit, la corde d'intersection des côtés de cet angle et de la conique pivote elle-même autour d'un point N de la normale. Si O est le centre de la conique, la droite ON est l'une de ces cordes. C'est un diamètre AB de la conique, tel que, si l'on construit sur lui comme diamètre un cercle, ce cercle passera par le point M, et les droites AB et MO sont un couple de sécantes communes au cercle et à la conique. Il en résulte que ces droites, c'est-à-dire OM et ON, sont également inclinées sur les axes.

Si X, Y et x, y sont les coordonnées de N et M par rapport aux axes de la conique, en supposant que celle-ci est une ellipse, on aura

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

et

$$\frac{\mathrm{X} - x}{\frac{x}{a^2}} = \frac{\mathrm{Y} - y}{\frac{y}{b^2}}$$

avec

$$\frac{\mathrm{X}}{x} = \frac{\mathrm{Y}}{-y},$$

car le point N est l'intersection de la normale en M et de la symétrique de OM par rapport aux axes. Soit t la valeur commune de $\frac{\mathrm{X}}{x}$ et de $\frac{\mathrm{Y}}{-y}$. En vertu de

$$a^2\frac{\mathrm{X}}{x} - b^2\frac{\mathrm{Y}}{y} = c^2,$$

on aura l'équation

$$(a^2 + b^2)t = a^2 - b^2$$

avec

$$\left(\frac{\mathrm{X}^2}{a^2} + \frac{\mathrm{Y}^2}{b^2}\right)\frac{1}{t^2} = 1;$$

d'ou

$$\frac{\mathrm{X}^2}{a^2} + \frac{\mathrm{Y}^2}{b^2} = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2.$$

On en conclut que, lorsque le point M parcourt la conique, le point N parcourt une conique homothétique et concentrique.

L'équation de cette conique, lieu du point N, donne très aisément comme conséquence les rayons de courbure situés sur les axes. En effet, soit P le point où MN coupe OX, on a

$$\frac{ON}{OM} = \frac{PN}{PM}.$$

En supposant que O, P, M, N viennent en ligne droite, cette relation devient, en désignant par ρ le rayon de courbure,

$$\frac{a\,\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{a} = \frac{a-\rho-a\,\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{a-(a-\rho)};$$

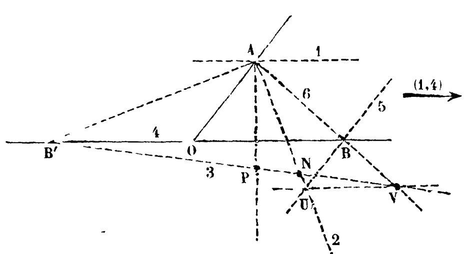
d'ou l'on tire aisément

$$\rho = \frac{b^2}{a}.$$

Ce calcul peut plutôt être considéré comme une vérification.

Ce théorème permet encore de construire les axes d'une conique, d'une ellipse par exemple, donnée par deux diamètres conjugués OA, OB.

En effet, soient OB′ la droite égale et opposée à OB, B′AN un angle droit, N le point où la droite AN coupe



la conique donnée, et P le point où la corde B′N coupe la normale en A. Les axes OX, OY sont les bissectrices de l'angle AOP. Pour avoir le point N, il suffit de se servir d'un hexagone de Pascal, par exemple celui dont les côtés sont : la tangente en A (côté n° 1), la droite AN elle-même (n° 2), la corde cherchée B′N (n° 3), le diamètre B′B (n° 4), la tangente en B (n° 5), et la corde BA (n° 6).

Le point d'intersection de 1 et 4 est à l'infini sur BB′, de 2 et 5 est en U, de 3 et 6 est en V, UV étant parallèle à BB′, et enfin B′V est la corde cherchée.

Remarque. — Les théorèmes précédents donnent un moyen facile de déterminer l'équation des axes de la conique, dont l'équation est, par rapport à des axes formant un angle θ,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

En effet, si, par un point fixe d'une conique, je mène les deux cordes qui aboutissent aux extrémités d'un diamètre quelconque, ces cordes sont les rayons correspondants d'une involution. Mais, si une droite a pour équation $y = ax$, l'angle ω de cette droite avec l'axe des x est donné par la relation

$$a = \frac{\sin\omega}{\sin(\theta - \omega)};$$

d'où

$$\cot\omega = \cot\theta + \frac{1}{a\sin\theta};$$

de sorte que, si α est l'angle que fait avec ox la bissectrice de $y = ax$ et de $y = a'x$, on aura

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2\cot\theta + \dfrac{1}{\sin\theta}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a'}\right)}{\cot^2\theta + \dfrac{\cot\theta}{\sin\theta}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a'}\right) + \dfrac{1}{aa'\sin^2\theta} - 1},$$

d'après la formule

$$\operatorname{tang}(\omega + \omega') = \frac{\cot\omega + \cot\omega'}{\cot\omega\cot\omega' - 1}.$$

Or cherchons, dans l'involution précédente, le couple de rayons rectangulaires. Il est obtenu pour les bissectrices des rayons doubles; mais le rayon double est obtenu lorsque le diamètre est devenu tangent à la conique. Or les tangentes à une conique menées par son centre sont ses asymptotes. Leur équation est

$$\frac{y^2}{x^2} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

La somme des deux racines en $\frac{y}{x}$ est nulle, leur produit égal à $\frac{b^2}{a^2}$.

Dans la formule écrite plus haut, α désignera donc l'angle d'un des rayons rectangulaires avec ox, si l'on remplace $\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$ par zéro et $\frac{1}{aa'}$ par $\frac{a^2}{b^2}$. On a ainsi

$$\tang 2\alpha = \frac{b^2 \sin 2\theta}{a^2 + b^2 \cos 2\theta};$$

mais les directions de ces rayons rectangulaires sont celles des axes; car oX, parallèle à l'un d'eux MA, coupe l'autre MB en son milieu et lui est perpendiculaire. oX est donc le diamètre conjugué des cordes MB et est perpendiculaire à cette direction de cordes. oX est donc un axe. De même MB est parallèle à l'autre axe.