Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 473-487

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__473_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1449

(voir 3ᵉ série, t. II, p. 288);

PAR M. LOUIS M....

La somme des restes du nombre entier n, divisé par chacun des nombres entiers qui le précèdent, augmentée de la somme des diviseurs des nombres non supérieurs à n, est égale à n^2. (E. CESARO.)

Soient $q_1, q_2, \ldots, q_n$ les quotients, et $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les restes obtenus en divisant n successivement par 1, 2, ..., n.

On a

$$\begin{aligned} n &= q_1.1 + r_1, \\ n &= q_2.2 + r_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n &= q_n.n + r_n. \end{aligned}$$

Ajoutons ces n égalités; il vient, en observant que $r_n = 0$,

$$n^2 = q_1.1 + q_2.2 + \ldots + q_n.n + r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-1}.$$

D'après les égalités ci-dessus, la suite des nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$$

contient q_1 termes divisibles par 1, q_2 termes divisibles par 2, ..., et, pour finir, q_n termes par n. La somme de tous les diviseurs de cette suite est donc

$$q_1.1 + q_2.2 + \ldots + q_n n.$$

L'égalité précédente démontre ainsi le théorème.

Note. — M. Moret-Blanc a résolu la même question.

Question 1309
(voir 3e série, t. III, p. 49?);

PAR M. F. PISANI.

ABC *étant un triangle donné, on joint ses sommets à un point,* O, *de son plan, par des lignes droites qui coupent les côtés* BC, CA, AB en A′, B′, C′; *soient*

a	*le milieu de*	BC;	a'	*le milieu de*	AA′;
b	»	CA;	b'	»	BB′;
c	»	AB;	c'	»	CC′;

les trois droites aa', bb', cc' *concourent en un point* M, *centre de la conique qui touche les côtés du triangle aux points* A′, B′, C′.

Cela posé, on a la relation

$$\frac{\mathrm{OA.OB.OC}}{\mathrm{OA'.OB'.OC'}} = \frac{\mathrm{M}a.\mathrm{M}b.\mathrm{M}c}{\mathrm{M}a'.\mathrm{M}b'.\mathrm{M}c'} \quad (1).$$

(H. SCHRÖTER.)

1° Les points c, b', a, milieux de AB, BB′, BC, sont sur la droite ac, parallèle à AC, et l'on a

$$\frac{cb'}{b'a} = \frac{\mathrm{AB'}}{\mathrm{B'C}},$$

de même

$$\frac{ac'}{c'b} = \frac{\mathrm{BC'}}{\mathrm{C'A}} \quad \text{et} \quad \frac{ba'}{a'c} = \frac{\mathrm{CA'}}{\mathrm{A'B}};$$

d'où

$$\frac{cb'.ac'.ba'}{b'a.c'b.a'c} = \frac{\mathrm{AB'.BC'.CA'}}{\mathrm{B'C.C'A.A'B}} = 1;$$

donc les trois droites aa', bb', cc' concourent en un même point M.

---

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

2° Pour démontrer que le point M est le centre de la conique qui touche les côtés BC, CA, AB du triangle aux points A', B', C', remarquons qu'en prenant pour axes des x et des y les droites AC, AB, et désignant par α, β, γ les côtés BC, CA, AB du triangle, les équations de bb', cc' sont

$$(AB' - \beta)y - \gamma x + \tfrac{1}{2}\beta\gamma = 0,$$
$$-\beta y + (AC' - \gamma)x + \tfrac{1}{2}\beta\gamma = 0;$$

d'où l'on tire, entre les coordonnées x, y du point M, commun à ces deux droites, l'équation

$$AB'.y - AC'.x = 0,$$

qui représente la droite AM.

D'autre part, l'équation de la droite B'C' étant

$$\frac{x}{AB'} + \frac{y}{AC'} - 1 = 0,$$

les coordonnées du point de rencontre des droites AM et B'C' sont

$$x = \tfrac{1}{2}AB', \quad y = \tfrac{1}{2}AC',$$

ce qui montre que la droite AM passe par le milieu de la corde des contacts, B'C', des tangentes AC, AB; donc la droite AM est dirigée suivant un diamètre de la conique qui touche les côtés du triangle ABC aux points A', B', C'.

Il est clair que les droites BM, CM sont, de même, dirigées suivant des diamètres de cette courbe; par conséquent, le point M est le centre de la conique tangente aux côtés du triangle ABC, aux points A', B', C'.

3° Les triangles ABA', BCB', CAC' étant, respectivement, coupés par les transversales CC', AA', BB', on a

$$OA.A'C.BC' = OA'.BC.C'A,$$
$$OB.B'A.CA' = OB'.AC.A'B,$$
$$OC.C'B.AB' = OC'.BA.B'C;$$

d'où

$$\frac{OA.OB.OC}{OA'.OB'.OC'} = \frac{AB.BC.CA}{AB'.BC'.CA'}\,\frac{A'B.B'C.C'A}{AB'.BC'.CA'}.$$

Mais

$$\frac{A'B.B'C.C'A}{AB'.BC'.CA'} = 1:$$

donc

$$(1) \qquad \frac{OA.OB.OC}{OA'.OB'.OC'} = \frac{AB.BC.CA}{AB'.BC'.CA'}.$$

On ferait voir de même que, dans le triangle abc, on a

$$\frac{Ma.Mb.Mc}{Ma'.Mb'.Mc'} = \frac{ab.bc.ca}{ab'.bc'.ca'}$$

et, par suite,

$$(2) \qquad \frac{Ma.Mb.Mc}{Ma'.Mb'.Mc'} = \frac{2ab.2bc.2ca}{2ab'.2bc'.2ca'} = \frac{AB.BC.CA}{AB'.BC'.CA'}.$$

Les relations (1) et (2) donnent

$$\frac{OA.OB.OC}{OA'.OB'.OC'} = \frac{Ma.Mb.Mc}{Ma'.Mb'.Mc'};$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc, Goffart, et Louis M....

Question 1515

(voir 3e série, t. III, p. 543);

PAR M. E. BARISIEN.

On donne une ellipse; les normales à cette ellipse aux points P, Q *se rencontrent en* R, *de telle sorte que les droites* OR *et* PQ *sont également inclinées sur les axes,* O *étant le centre de l'ellipse. On demande de démontrer :*

1° *Que la partie de* PQ, *comprise entre les axes, est de longueur constante*;

2° *Que les deux autres normales menées de* R *à l'ellipse forment entre elles un angle droit.*

(Wolstenholme.)

1° Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) les coordonnées des points P et Q; (α, β) les coordonnées du point R;

$$(1) \qquad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

l'équation de l'ellipse;

$$(2) \qquad y = mx + n$$

l'équation de la droite PQ.

Nous allons chercher la relation qui lie les coefficients m, n, en exprimant que la droite OR a pour coefficient angulaire $-m$.

Le point R étant à l'intersection des deux normales PR, QR, on a, entre ses coordonnées α, β, les relations

$$a^2y_1\alpha - b^2x_1\beta = c^2x_1y_1 \quad \text{et} \quad a^2y_2\alpha - b^2x_2\beta = c^2x_2y_2,$$

qui donnent

$$\alpha = \frac{c^2x_1x_2(y_1 - y_2)}{a^2(x_2y_1 - x_1y_2)}, \quad \beta = \frac{c^2y_1y_2(x_1 - x_2)}{b^2(x_2y_1 - x_1y_2)}.$$

Mais

$$y_1 = mx_1 + n \quad \text{et} \quad y_2 = mx_2 + n;$$

d'où

$$y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2) \quad \text{et} \quad x_2y_1 - x_1y_2 = -n(x_1 - x_2),$$

et par suite

$$\alpha = \frac{-c^2m}{a^2n}\cdot x_1x_2 \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{c^2}{b^2n}\cdot y_1y_2,$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{a^2}{b^2m}\cdot\frac{y_1y_2}{x_1x_2}.$$

D'autre part, la résolution des équations (1) et (2) conduit à

$$(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2-b^2)=0,$$
$$(a^2m^2+b^2)y^2-2b^2ny+b^2(n^2-a^2m^2)=0;$$

il en résulte

$$x_1x_2=\frac{a^2(n^2-b^2)}{a^2m^2+b^2},\quad y_1y_2=\frac{b^2(n^2-a^2m^2)}{a^2m^2+b^2}$$

et

$$\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=\frac{b^2(n^2-a^2m^2)}{a^2(n^2-b^2)}.$$

Le coefficient angulaire de OR est donc

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{n^2-a^2m^2}{m(n^2-b^2)}.$$

En exprimant que ce coefficient est égal à $-m$, on a

$$\frac{n^2-a^2m^2}{m(n^2-b^2)}=-m,$$

d'où

$$(3)\qquad (m^2+1)n^2=(a^2+b^2)m^2.$$

Or la droite PQ coupe les axes en des points dont les distances au centre O de l'ellipse ont, respectivement, pour valeurs $-\frac{n}{m}$ et n; il s'ensuit que la partie de PQ comprise entre les axes est égale à

$$\sqrt{\frac{n^2}{m^2}+n^2}=\frac{n}{m}\sqrt{1+m^2}.$$

Mais, d'après l'équation (3),

$$\frac{n}{m}\sqrt{1+m^2}=\sqrt{a^2+b^2}:$$

donc la partie de PQ comprise entre les axes est de longueur constante $\sqrt{a^2+b^2}$.

2° Formons l'équation du quatrième degré qui donne les coefficients angulaires des quatre normales à l'ellipse, issues du point R (α, β). Il faut, à cet effet, éliminer x et y entre les équations

$$\mu = \frac{y - \beta}{x - \alpha};$$

$$a^2 \alpha y - b^2 \beta x = c^2 xy,$$

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

μ représentant le coefficient angulaire de la normale.

Le calcul conduit à l'équation

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} b^2 \alpha^2 . \mu^4 - 2 b^2 \alpha \beta \mu^3 \\ \quad + (b^2 \beta^2 + a^2 \alpha^2 - c^4) \mu^2 - 2 a^2 \alpha \beta \mu + a^2 \beta^2 = 0. \end{array} \right.$$

Si μ_1 et μ_2 sont les coefficients angulaires des normales PR, QR, et μ_3 et μ_4 les coefficients angulaires des deux autres normales, on a, d'après l'équation (4),

$$(5) \qquad \mu_1 . \mu_2 . \mu_3 . \mu_4 = \frac{a^2 \beta^2}{b^2 \alpha^2} = \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2;$$

or

$$\left(\frac{\beta}{\alpha} \right) = - m,$$

par conséquent

$$(6) \qquad \mu_1 . \mu_2 . \mu_3 . \mu_4 = \frac{a^2 m^2}{b^2}.$$

Mais

$$\mu_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}, \quad \mu_2 = \frac{a^2 y_2}{b^2 x_2};$$

donc

$$\mu_1 . \mu_2 = \frac{a^4 y_1 y_2}{b^4 x_1 x_2} = \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{n^2 - a^2 m^2}{n^2 - b^2} \right) = \frac{- a^2 m^2}{b^2}.$$

En tenant compte de cette valeur de $\mu_1 \mu_2$, la relation (6) donne

$$\mu_3 . \mu_4 = - 1,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Note. — M. Launoy, professeur au lycée du Puy, et M. Juhel-Renoy, ont résolu la même question.

Question 1516

(voir 3ᵉ série, t. III, p. 544);

PAR MM. G. DROUOT ET H. BAGARD,
Élèves du lycée de Bar-le-Duc (Mathématiques spéciales).

On mène la normale en un point P *d'une ellipse donnée ; cette normale coupe les axes aux points* Q, R ; *sur* QR *comme diamètre on décrit un cercle ; par un point quelconque,* S, *de la tangente à l'ellipse au point* P, *on mène des tangentes à ce cercle : démontrer que la corde de l'ellipse qui passe par les points de contact sous-tend un angle droit, au point* (P) [1].

(WOLSTENHOLME.)

On sait que les polaires des divers points de la droite PS, par rapport au cercle considéré, passent par un point fixe A, pôle de PS, situé sur la normale en P à l'ellipse, et qui contient le centre du cercle.

Or, d'après le théorème de *Frégier*, la corde interceptée sur l'ellipse par les côtés d'un angle droit ayant son sommet P sur la courbe, passe par un point fixe de normale. Et inversement, toute corde de l'ellipse qui passe par ce point fixe sous-tend un angle droit au point P.

Donc, si nous démontrons que la corde correspondant dans l'ellipse à la polaire d'un point particulier S de PS sous-tend un angle droit au point P, la question sera résolue [2].

---

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

[2] Parce qu'il sera ainsi démontré que le pôle A est le point où la normale est rencontrée par les cordes de l'ellipse qui sous-tendent des angles droits en P.

Considérons le point S pour lequel la polaire relative au cercle est un diamètre HL de l'ellipse.

Soient C le centre du cercle décrit sur QR comme diamètre, et O le centre de l'ellipse.

On a

$$(1) \qquad CA.CP = \overline{CQ}^2 = \overline{CO}^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{CA}{CO} = \frac{CO}{CP};$$

il s'ensuit que les triangles CAO, COP sont semblables; leur similitude donne

$$\frac{OA}{OP} = \frac{CA}{CO} = \frac{CA}{CQ}.$$

D'autre part, on a, d'après la relation (1),

$$\frac{CA}{CQ} = \frac{CQ}{CP} = \frac{CQ - CA}{CP - CQ} = \frac{AQ}{QP}: \quad \text{donc} \quad \frac{OA}{OP} = \frac{AQ}{QP},$$

ce qui montre que la droite OQ est bissectrice de l'angle AOP; par conséquent OP = OL ([1]).

Or, OP est la médiane du triangle HPL; donc ce triangle est rectangle en P, et la proposition est démontrée.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc, Launoy, professeur au lycée du Puy, Juhel-Renoy et Barisien.

Question 1524

(voir 3ᵉ série, t. IV, p. 164);

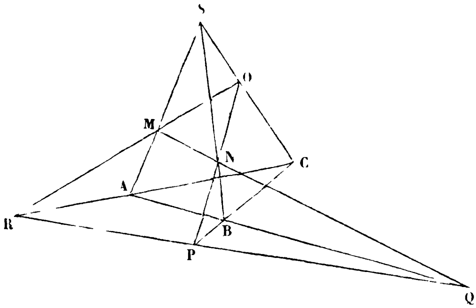
PAR M. L'ABBÉ A. GENEIX-MARTIN.

1° *Les points où les arêtes d'une des faces d'un tétraèdre sont rencontrées par les plans bissecteurs extérieurs des dièdres opposés sont en ligne droite;*

([1]) C'est une égalité que l'on peut effectivement conclure de ce que les demi-diamètres OP, OL de l'ellipse forment des angles égaux avec l'un des deux axes de la courbe.

2° *Cette droite est dans le plan déterminé par les points où les trois autres arêtes sont rencontrées par les plans bissecteurs intérieurs des dièdres opposés.*

(E. Cesaro.)



1° Soient R, P, Q les points où les arètes de la face ABC sont rencontrées par les plans bissecteurs extérieurs des dièdres opposés.

Le *plan bissecteur d'un angle dièdre d'un tétraèdre divise l'aréte opposée en deux segments proportionnels aux faces adjacentes.* Le théorème est vrai aussi pour le plan bissecteur d'un angle extérieur au tétraèdre. (*Voir* solutions des problèmes d'Amiot, édition 1873, p. 250.)

D'après ce théorème, on a

$$\frac{PB}{PC}=\frac{ASB}{ASC},\quad \frac{RC}{RA}=\frac{BSC}{ASB},\quad \frac{QA}{QB}=\frac{ASC}{BSC};$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$\frac{PB.RC.QA}{PC.RA.QB}=\frac{ASB.BSC.ASC}{ASC.ASB.BSC}=1.$$

Donc, d'après le théorème de Ménélaüs, les trois points R, P, Q sont en ligne droite.

2° Soient M, N, O les points où les arètes SA, SB, SC sont rencontrées par les plans bissecteurs intérieurs des dièdres opposés. On a

$$\frac{RC}{RA} = \frac{BSC}{ASB}, \quad \frac{MA}{MS} = \frac{ABC}{BSC}, \quad \frac{OS}{OC} = \frac{ASB}{ABC},$$

d'où

$$\frac{RC.MA.OS}{RA.MS.OC} = \frac{BSC.ABC.ASB}{ASB.BSC.ABC} = 1;$$

donc les trois points O, M, R sont en ligne droite. On prouverait de même que P est sur le prolongement de ON, et Q sur le prolongement de MN. Donc la droite RPQ est dans le plan MNO. Ce qu'il fallait démontrer.

Note. — La même question a été résolue par M. Valeri, professeur au lycée royal de Modène.

Question 1533

(voir 3e série, t. IV, p. 391);

PAR M. J. ROMERO, à Aranda de Duero.

n étant un nombre entier positif,

$$3^{2n+3} + 40n - 27$$

est divisible par 64.

(WOLSTENHOLME.)

On peut énoncer la proposition sous la forme suivante, plus générale :

n et p étant deux nombres entiers positifs

$$a^{2(n+p)+1} + (a^2 - 1)(a^2 - a - 1)n - a^{2p+1},$$

est divisible par $(a^2 - 1)^2$.

En effet, si l'on attribue à n les deux valeurs entières et positives m et $m+1$, on aura, par soustraction, la congruence

(1) $a(a^2-1)[a^{2(m+p)}-1]+(a^2-1)^2 \equiv 0, \quad [\text{mod.}(a^2-1)^2].$

D'autre part, pour $n=1$, on a

(2) $a(a^2-1)(a^{2p}-1)+(a^2-1)^2 \equiv 0, \quad [\text{mod.}(a^2-1)^2];$

par conséquent, la propriété énoncée aura lieu pour toutes les valeurs entières positives de n ([1]).

Note. — MM. Moret-Blanc, Juhel-Renoy et Fauquembergue ont résolu la même question.

M. Juhel-Renoy a démontré cette proposition plus générale : l'expression

$$(a+1)^{2(n+p)}-(a^2+2a)n-(a+1)^{2p},$$

dans laquelle a, n, p sont des nombres entiers positifs, est divisible par $(a^2+2a)^2$.

M. Fauquembergue a, de même, généralisé la proposition de M. Wolstenholme, en démontrant le théorème suivant :

m désignant $a^\alpha-1$, l'expression

$$a^{\alpha n+\alpha}+(km-a^\alpha)mn-a^\alpha$$

est divisible par m^2.

a, α, n, k, m représentent des nombres entiers positifs.

Question 1536

(voir 3e série, t. IV, p. 391),

PAR M. GIOVANI RUSSO, à Cantazaro.

Dans la parabole, les segments déterminés sur deux tangentes issues d'un même point de l'axe par deux tangentes quelconques sont égaux. (D'OCAGNE.)

Soient AB, AC les tangentes issues d'un point A de

([1]) On peut conclure de la congruence (1) que, si la propriété énoncée existe pour une certaine valeur m de n, elle aura lieu encore pour la valeur $m+1$ de n et la congruence (2) montre que cette propriété existe pour $n=1$; donc elle a lieu pour toute valeur entière positive de n. (G.)

l'axe de la parabole considérée [1]; DE, FG deux autres tangentes rencontrant respectivement AB aux points D, F, et AC aux points E, G, de sorte que les segments déterminés sur AB, AC sont DF, EG.

On sait que, dans la parabole, la projection de la partie d'une tangente variable, comprise entre deux tangentes fixes, sur une droite perpendiculaire à l'axe, est constante [2]; donc, en désignant par HM et NL les projections des tangentes DE, FG sur la droite BC qui est perpendiculaire à l'axe, on a

$$HM = NL,$$

et, supprimant la partie LM, commune à ces deux projections, il vient

$$HL = MN,$$

c'est-à-dire que les projections des segments DF, EG sont égales entre elles. En outre, les deux droites DF, EG sont également inclinées sur BC; par conséquent, on peut conclure l'égalité des segments DF, EG de l'égalité de leurs projections HL, MN. C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1538

(voir 3e série, t. IV, p. 391);

PAR UN ANONYME.

L'aire du triangle formé par les centres des trois cercles exinscrits à un triangle est égale au produit

---

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

(2) Cette projection est précisément la moitié de la projection de la corde des contacts des tangentes fixes sur une perpendiculaire à l'axe. Cela résulte simplement de ce que le diamètre mené par le point de rencontre de deux tangentes divise en parties égales la corde des contacts. (G.)

du périmètre de ce triangle par le rayon du cercle circonscrit. (BARISIEN.)

Soient M, N, P les points où les bissectrices AO, BO, CO des angles d'un triangle ABC rencontrent la circonférence circonscrite à ce triangle (¹), et O′, O″, O‴ les centres des trois cercles exinscrits, respectivement tangents aux côtés BC, CA, AB ou a, b, c; je vais d'abord démontrer que les points M, N, P sont les milieux des droites OO′, OO″, OO‴.

Dans le triangle OBM, chacun des deux angles BOM, OBM est égal à $\frac{A+B}{2}$; donc $MB = MO$; mais, le triangle OBO′ étant rectangle en B, $MO' = MB$; donc $MO' = MO$, et par conséquent le point M est le milieu de OO′. On démontrerait de même que les points N, P sont les milieux des droites OO″, OO‴.

Cela étant, les égalités

$$OM = \tfrac{1}{2}OO', \quad ON = \tfrac{1}{2}OO'', \quad OP = \tfrac{1}{2}OO'''$$

donnent

$$MN = \tfrac{1}{2}O'O'', \quad MP = \tfrac{1}{2}O'O''', \quad PN = \tfrac{1}{2}O''O'''$$

et, par suite,

$$\text{surf. } O'O''O''' = 4\,MNP.$$

Reste à faire voir que, en désignant par R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC et par $2p$ le périmètre de ce triangle, on a

$$\text{surf. } MNP = \tfrac{1}{2}p.R.$$

Soit C′ le centre du cercle circonscrit au triangle. Les rayons C′M, C′N étant respectivement perpendiculaires aux milieux des cordes BC, CA, l'angle MC′N est le

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure.

supplément de l'angle C; il en résulte

$$\text{surf. } C'MN = \tfrac{1}{2} R^2 \sin C = \tfrac{1}{2} R \sin C \times R = \tfrac{1}{4} a R.$$

On aura de même

$$C'MP = \tfrac{1}{4} b R, \quad C'NP = \tfrac{1}{4} a R;$$

donc

$$C'MN + C'MP + C'NP, \quad \text{ou} \quad MNP = \frac{p}{2} R.$$

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; Juhel-Renoy; A. Bussani, professeur au lycée de Padoue.