NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JUHEL-RÉNOY

Théorèmes sur l'ellipse et l'hyperbole équilatère

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 460-463

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__460_1>

THÉORÈMES SUR L'ELLIPSE ET L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE;

PAR M. JUHEL-RÉNOY.

THÉORÈME. — *On joint un point* M *d'une ellipse aux extrémités* A, A' *du grand axe. Soient* P, Q *les points d'intersection de* MA' *et* MA *avec la directrice relative au foyer* F.

L'angle PFQ *est droit* (¹).

Réciproquement, si un segment PQ *de la directrice est vu du foyer* F *sous un angle droit, les droites* QA, PA' *se coupent sur l'ellipse.*

En effet, l'équation de l'ellipse étant

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

les équations des droites MA, MA' peuvent s'écrire

$$\frac{y}{b} = \lambda\left(1 - \frac{x}{a}\right), \quad \frac{y}{b} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{x}{a}\right).$$

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure.

Soit C le point d'intersection du grand axe et de la directrice, on a

$$\mathrm{PC} = \frac{b}{\lambda}\left(1 + \frac{a}{c}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{CQ} = -b\lambda\left(1 - \frac{a}{c}\right):$$

donc

$$\mathrm{PC}.\mathrm{CQ} = -b^2\left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right) = \frac{b^4}{c^2} = \overline{\mathrm{FC}}^2;$$

par conséquent, l'angle PFQ est droit.

Démontrons la réciproque.

Soient $\mathrm{PC} = y_1$ et $\mathrm{CQ} = -y_2$.

On a, par hypothèse,

$$y_1 y_2 = -\frac{b^4}{c^2}.$$

L'équation de PA' est

$$\frac{y}{y_1} = \frac{x + a}{\frac{a^2}{c} + a},$$

et l'équation de QA

$$\frac{y}{y_2} = \frac{x - a}{\frac{a^2}{c} - a}.$$

On a donc, pour le lieu du point de rencontre des deux droites,

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

équation de l'ellipse considérée.

Théorème. — *Soient* M *et* M' *les extrémités de deux demi-diamètres conjugués* OM, OM' *d'une ellipse, et* F *un foyer.*

La droite M'H *parallèle à* MF *est tangente au cercle décrit sur le petit axe comme diamètre.*

En effet, soient $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ l'équation de l'ellipse, et $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ l'abscisse et l'ordonnée du point M ; les coordonnées de M' seront $-a\sin\varphi$, $b\cos\varphi$, et l'équation de M'H sera

$$(1) \qquad bx\sin\varphi - (bc + ay)\cos\varphi = -(ab + cy).$$

Pour avoir l'équation de l'enveloppe, prenons la dérivée de l'équation (1), par rapport à φ,

$$(2) \qquad bx\cos\varphi + (bc + ay)\sin\varphi = 0.$$

Élevons au carré les équations (1) et (2), et ajoutons-les ; nous aurons, pour l'équation de l'enveloppe,

$$x^2 + y^2 = a^2 - c^2 = b^2,$$

ce qui démontre la proposition.

Théorème. — *Soit un triangle rectangle inscrit dans une hyperbole équilatère :*

Les côtés de l'angle droit AB, AC *interceptent sur les asymptotes deux segments dont les milieux sont sur le cercle des neuf points du triangle.*

Prenons pour axes de coordonnées les deux côtés AB, AC ; et soient AB $= a$, AC $= b$.

L'équation d'une hyperbole équilatère circonscrite au triangle sera

$$x^2 - y^2 + \lambda xy - ax + by = 0.$$

Soit $y = cx + d$ l'équation d'une asymptote ; c et d vérifient les équations

$$1 - c^2 + \lambda c = 0,$$
$$(\lambda - 2c)d - a + bc = 0.$$

De ces deux équations on déduit, en éliminant λ,

$$(1) \qquad (c^2 + 1)d + ac - bc^2 = 0.$$

Or, pour démontrer la proposition énoncée, il suffit de faire voir que le point, dont les coordonnées sont

$$y = \frac{d}{2}, \quad x = -\frac{d}{2c} = -\frac{y}{c},$$

est sur le cercle des neuf points du triangle.

Remplaçons dans la relation (1) d par $2y$, et c par $-\frac{y}{x}$, nous aurons entre les coordonnées x, y l'équation

$$2(x^2+y^2)-ax-by=0,$$

qui représente le cercle des neuf points du triangle rectangle ABC.

La proposition est ainsi démontrée.