MORET-BLANC

Composition mathématique pour l'admission à l'École centrale (seconde session, octobre 1883)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 454-460

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__454_1>

COMPOSITION MATHÉMATIQUE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE (SECONDE SESSION, OCTOBRE 1885)

(voir 3e série, t. III, p. 291);

SOLUTION PAR M. MORET-BLANC.

On donne dans un plan un rectangle ABCD *et un point quelconque* P; *par ce point on mène une droite de di-*

rection arbitraire PR; *des quatre sommets du rectangle, on abaisse des perpendiculaires* AA′, BB′, CC′, DD′ *sur cette droite.*

Cela posé, on demande de démontrer :

1° *Que, parmi toutes les droites* PR *issues du point* P, *il en existe une,* PR′, *pour laquelle la somme* r^2 *des carrés des distances des quatre sommets du rectangle à cette droite est maxima, et une autre,* PR″, *pour laquelle cette somme est minima;*

2° *Que les deux droites,* PR′ PR″ *sont rectangulaires;*

3° *Que le lieu géométrique des points* P *pour lesquels le maximum de* r^2 *conserve une valeur donnée* μ^2 *est une conique, et que la tangente à cette conique, au point* P *est la droite* PR′; *que, de même, le lieu des points* P *pour lesquels le minimum de* r^2 *conserve une valeur donnée* λ^2 *est une conique, et que la tangente à cette conique, au point* P, *est la droite* PR″ ;

4° *Que ces deux coniques sont homofocales et que leurs foyers communs sont indépendants des valeurs attribuées aux deux paramètres* μ^2, λ^2. *Donner la position de ces foyers et examiner en particulier le cas où l'une des dimensions du rectangle s'annulerait.*

1° Je prends pour origine des coordonnées rectangulaires le centre, O, du rectangle, et pour axes, des parallèles Ox, Oy, aux côtés AB, BC, dont je représente les longueurs par $2a$, $2b$; $a > b$.

Les coordonnées des sommets A, B, C, D sont respectivement

$$(-a, -b);\ (a, -b);\ (a, +b);\ (-a, +b).$$

Soient α, β les coordonnées du point P, l'équation d'une droite PR, issue de ce point, est

$$y - \beta = m(x - \alpha);$$

d'où

$$\overline{AA'}^2 = \frac{[(b - ma) + (\beta - m\alpha)]^2}{m^2 + 1},$$

$$\overline{BB'}^2 = \frac{[(b + ma) + (\beta - m\alpha)]^2}{m^2 + 1},$$

$$\overline{CC'}^2 = \frac{[(b - ma) - (\beta - m\alpha)]^2}{m^2 + 1},$$

$$\overline{DD'}^2 = \frac{[(b + ma) - (\beta - m\alpha)]^2}{m^2 + 1},$$

en remarquant que l'on peut changer le signe de la quantité élevée au carré.

Il s'ensuit

$$\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 + \overline{CC'}^2 + \overline{DD'}^2 = \frac{4(a^2 + \alpha^2)m^2 - 8\alpha\beta m + 4(b^2 + \beta^2)}{m^2 + 1} = r^2,$$

ou, en chassant le dénominateur,

$$4\left(a^2 + \alpha^2 - \frac{r^2}{4}\right)m^2 - 8\alpha\beta m + 4\left(b^2 + \beta^2 - \frac{r^2}{4}\right) = 0$$

ou

$$\left(a^2 + \alpha^2 - \frac{r^2}{4}\right)m^2 - 2\alpha\beta m + \left(b^2 + \beta^2 - \frac{r^2}{4}\right) = 0,$$

équation qui donne

$$m = \frac{4\alpha\beta + \sqrt{-r^4 + 4(a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2)r^2 - 16(a^2b^2 + b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)}}{4\left(a^2 + \alpha^2 - \frac{r^2}{4}\right)}.$$

Décomposons en facteurs la quantité sous le radical, et à cet effet cherchons les racines r^2 de l'équation

$$r^4 - 4(a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2)r^2 + 16(a^2b^2 + b^2\alpha^2 + a^2\beta^2) = 0$$

Le coefficient de r^4 étant négatif, la plus grande racine sera un maximum, et la plus petite, un minimum.

On a

$$\begin{aligned} r^2 &= 2(a^2+b^2+\alpha^2+\beta^2) \\ &\quad \pm 2\sqrt{(a^2+b^2+\alpha^2+\beta^2)^2 - 4(a^2b^2+b^2\alpha^2+a^2\beta^2)} \\ &= 2(a^2+b^2+\alpha^2+b^2) \pm 2\sqrt{(a^2-b^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$2(a^2+b^2+\alpha^2+\beta^2)+2\sqrt{(a^2-b^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}$$

est un maximum μ^2, et

$$2(a^2+b^2+\alpha^2+\beta^2)-2\sqrt{(a^2-b^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}$$

un minimum λ^2 (¹).

Si le point P coïncidait avec le point O, le maximum serait $4a^2$ et le minimum $4b^2$; en général, le point P s'éloignant, le maximum sera plus grand que $4a^2$ et le minimum sera compris entre $4b^2$ et $4a^2$.

(¹) Pour que les valeurs de m soient réelles, il faut que la quantité

$$-r^4+4(a^2+b^2+\alpha^2+\beta^2)r^2-16(a^2b^2+b^2\alpha^2+a^2\beta^2)$$

soumise au radical soit positive ou nulle, ce qui revient à

$$r^4-4(a^2-b^2+\alpha^2+\beta^2)r^2+16(a^2b^2+b^2\alpha^2+a^2\beta^2)\leqq 0.$$

En désignant par μ^2 et λ^2 les valeurs de r^2 qui annulent ce dernier polynôme, on a

$$\begin{aligned} r^4-4(a^2+b^2+\alpha^2+\beta^2)r^2+16(a^2b^2+b^2\alpha^2+a^2\beta^2) \\ = (r^2-\mu^2)(r^2-\lambda^2), \end{aligned}$$

où μ^2 et λ^2 sont des quantités réelles, positives et inégales.

Soit $\mu^2>\lambda^2$; alors la relation

$$r^4-4(a^2+b^2+\alpha^2+\beta^2)r^2+16(a^2b^2+b^2\alpha^2+a^2\beta^2)\leqq 0$$

entraîne évidemment les suivantes :

$$(r^2-\mu^2)\leqq 0,\quad r^2-\lambda^2\geqq 0 \quad \text{ou} \quad r^2\leqq\mu^2,\quad \text{et} \quad r^2\geqq\lambda^2,$$

c'est-à-dire que μ^2 est un maximum, et λ^2 un minimum.

(G.)

2° Pour le maximum, le coefficient angulaire de PR′ est

$$m' = \frac{4\alpha\beta}{4a^2 + 4\alpha^2 - \mu^2}$$
$$= \frac{2\alpha\beta}{a^2 - b^2 + \alpha^2 - \beta^2 - \sqrt{(a^2 - b^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}}$$
$$= \frac{a^2 - b^2 + \alpha^2 - \beta^2 + \sqrt{(a^2 - b^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}}{-2\alpha\beta}.$$

Pour le minimum, le coefficient angulaire de PR″ est

$$m'' = \frac{4\alpha\beta}{4a^2 + 4b^2 - \lambda^2}$$
$$= \frac{2\alpha\beta}{a^2 - b^2 + \alpha^2 - \beta^2 + \sqrt{(a^2 - b^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2)}}$$
$$= \frac{a^2 - b^2 + \alpha^2 - \beta^2 - \sqrt{(a^2 - b^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}}{-2\alpha\beta};$$

d'où $m'm'' = -1$, ce qui prouve que les deux droites PR′, PR″ sont rectangulaires.

3° En regardant λ^2 et μ^2 comme des constantes α et β comme des variables, et faisant disparaître les radicaux des valeurs de μ^2 et λ^2, on a

$$4(\mu^2 - 4b^2)\alpha^2 + 4(\mu^2 - 4a^2)\beta^2 = (\mu^2 - 4a^2)(\mu^2 - 4b^2)$$

et

$$4(\lambda^2 - 4b^2)\alpha^2 + 4(\lambda^2 - 4a^2)\beta^2 = (\lambda^2 - 4a^2)(\lambda^2 - 4b^2).$$

Ces deux équations représentent deux coniques dont les axes sont dirigés suivant les axes des coordonnées. D'après la remarque faite plus haut [1], la première est une ellipse, et la seconde une hyperbole, le grand axe de l'ellipse et l'axe transverse de l'hyperbole sont dirigés suivant Oy.

---

[1] Cette remarque est que le maximum μ^2 est plus grand que $4a^2$, et le minimum λ^2 compris entre $4b^2$ et $4a^2$.

Le coefficient angulaire de la tangente à l'ellipse au point P est

$$-\frac{(\mu^2-4b^2)\alpha}{(\mu^2-4a^2)6}.$$

Désignons, pour abréger l'écriture, par R le radical

$$\sqrt{(a^2-b^2+\alpha^2-6^2)^2+4\alpha^2 6^2};$$

on a

$$\begin{aligned}
\frac{\mu^2-4b^2}{\mu^2-4a^2} &= \frac{\alpha^2+6^2+a^2-b^2+\mathrm{R}}{\alpha^2+6^2-(a^2-b^2)+\mathrm{R}}\\
&= \frac{(\alpha^2+6^2+a^2-b^2+\mathrm{R})[\alpha^2+6^2-(a^2-b^2)-\mathrm{R}]}{[\alpha^2+6^2-(a^2-b^2)]^2-\mathrm{R}^2}\\
&= \frac{a^2-b^2+\alpha^2-6^2+\mathrm{R}}{2\alpha^2};
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
&\frac{(\mu^2-4b^2)\alpha}{(\mu^2-4a^2)6}\\
&= \frac{a^2-b^2+\alpha^2-6^2+\sqrt{(a^2-b^2+\alpha^2-6^2)^2+4\alpha^2 6^2}}{-2\alpha 6} = m'.
\end{aligned}$$

Pour l'hyperbole, il suffit de changer μ^2 en λ^2, et R en $-$R; ce qui donne

$$\begin{aligned}
&-\frac{(\lambda^2-4b^2)\alpha}{(\lambda^2-4a^2)6}\\
&= \frac{a^2-b^2+\alpha^2-6^2-\sqrt{(a^2-b^2+\alpha^2-6^2)^2+4\alpha^2 6^2}}{-2\alpha 6} = m''.
\end{aligned}$$

Les tangentes aux deux coniques, au point P, sont donc les droites PR', PR''.

4° L'ellipse et l'hyperbole étant concentriques et se coupant orthogonalement, on pourrait déjà conclure qu'elles sont homofocales; c'est ce que démontre aussi la détermination directe de leurs foyers.

Les carrés des demi-axes de l'ellipse sont $\frac{\mu^2-4b^2}{4}$,

$\frac{\mu^2 - 4a^2}{4}$; leur différence $(a^2 - b^2)$ est le carré de la distance de chacun des foyers au centre, ces foyers sont situés sur l'axe Oy, leurs ordonnées sont

$$y = \pm\sqrt{a^2 - b^2}.$$

On trouve les mêmes valeurs pour les ordonnées des foyers de l'hyperbole.

Lorsque $b = 0$, les ordonnées des foyers sont $\pm a$.

Lorsque $a = 0$, les foyers sont sur Ox, et leurs abscisses sont $\pm b$.

Note. — La même question a été résolue par MM. Barisien ; et Gaillardon, Jacques, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Rouen.