Questions proposées par M. E. Cesàro

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 448-454

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__448_1>

QUESTIONS PROPOSÉES PAR M. E. CESARO.

1. Si d'un point quelconque d'une circonférence on mène des perpendiculaires aux côtés d'un triangle inscrit à une circonférence concentrique, le triangle formé par les pieds de ces perpendiculaires a une aire constante.

2. Soit ABC un triangle. D'un point P, pris sur la

bissectrice de l'angle A, on abaisse les perpendiculaires PA′, PB′, PC′ aux côtés. Démontrer que les droites PA′, B′C′ se coupent sur la médiane issue de A.

Déduire, au moyen de cette propriété, la construction du rayon de courbure des coniques, due à M. Mannheim, de la construction due à M. Catalan.

3. 1° Il y a une infinité de polyèdres, à sommets trièdres, qui ne diffèrent que par le nombre de leurs faces hexagonales; mais il n'y en a pas deux qui ne diffèrent que par le nombre de leurs faces d'un autre ordre.

2° Il y a une infinité de polyèdres, à sommets tétraèdres, qui ne diffèrent que par le nombre de leurs faces quadrangulaires; mais il n'y en a pas deux qui ne diffèrent que par le nombre de leurs faces d'un autre ordre.

3° Il n'y a pas deux polyèdres, à sommets pentaèdres, qui ne diffèrent que par le nombre de leurs faces d'un certain ordre.

4. On considère une infinité de coniques ayant un contact du second ordre avec une courbe, en un point donné M. Démontrer que, si l'un des foyers décrit une conique tangente en M à la courbe, le second foyer décrit aussi une conique tangente à la courbe au même point.

5. On considère, en un point quelconque d'une surface développable, la génératrice rectiligne et une ligne géodésique. La tangente de l'angle de ces deux lignes est égale au rapport entre les angles de contingence et de torsion de la géodésique, au point considéré.

6. Soient α, β, γ, ... les nombres *premiers*, qui,

diminués de l'unité, entrent un nombre *impair* de fois dans $2n$ ([1]). L'excès de la somme des n premiers *nombres de Bernoulli*, sur la somme des n nombres suivants, est égal à un nombre *entier*, augmenté de

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \ldots.$$

Il faut encore ajouter $\frac{1}{2}$, dans le cas de *n pair*.

7. Si l'on divise par le carré du logarithme de n le nombre des cas où l'inverse d'un nombre entier non supérieur à n a un développement décimal limité, le rapport obtenu tend vers

$$\frac{1}{2 \log 2 \log 5} = 2{,}376\ldots,$$

lorsque n augmente indéfiniment.

8. Soient x et y deux nombres entiers, variant séparément de 1 à n.

1° Si $\theta(x,y)$ est le *nombre des diviseurs communs* à x et y, on a

$$\lim \frac{\Sigma\,\theta(x,y)}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1{,}6449,$$

lorsque n augmente indéfiniment.

2° Si $\delta(x, y)$ est la différence entre la *somme des diviseurs communs* à x et y et le logarithme népérien de $\sqrt{xy}$, on a

$$\lim \frac{\Sigma\,\delta(x,y)}{n^2} = 2C - \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2} = 0{,}8320.$$

([1]) C'est-à-dire tels que les plus grands nombres entiers contenus dans $\frac{2n}{\alpha - 1}$, $\frac{2n}{\beta - 1}$, $\frac{2n}{\gamma - 1}$, … soient *impairs*.

9. On considère une ligne à double courbure. Démontrer que la surface engendrée par la droite, qui joint deux points correspondants des arêtes de rebroussement des surfaces *rectifiante* et *polaire*, est toujours gauche.

10. Soit δ_c l'excès du nombre des solutions entières, non négatives, de l'équation

$$ax + by = c$$

sur $\frac{c}{ab}$. Démontrer que, si n augmente indéfiniment,

$$\lim \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_n}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

11. Soit $f(x)$ le nombre des entiers premiers avec x, et non supérieurs au reste de la division de n par x. Démontrer que l'expression

$$\frac{1}{n}[f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n)]$$

tend vers

$$\frac{6}{\pi^2} - \frac{1}{2},$$

quand n augmente indéfiniment.

12. On forme un déterminant de n^2 éléments : chaque élément est égal à 1, ou à 0, suivant que le plus grand commun diviseur entre ses deux indices est ou n'est pas un carré parfait. Soit, d'autre part, $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ la valeur du produit $2.3.4\ldots n$, décomposé en ses facteurs premiers. Démontrer que le déterminant proposé est égal à $(-1)^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}$.

13. On considère les plus grands nombres entiers contenus dans $\frac{n^2}{2}$, $\frac{n^2}{3}$, $\frac{n^2}{4}$, ... Démontrer que la somme

des $n-1$ premiers est égale à la somme de tous les autres.

14. La probabilité que deux nombres quelconques admettent δ pour plus grand commun diviseur est $\frac{6}{(\pi\delta)^2}$.

15. Soit $\mu(n)$ une fonction, égale à $+1$ ou à -1, suivant que n est composé d'un nombre pair ou d'un nombre impair de facteurs premiers inégaux, autres que l'unité. Soit $\mu(n)=0$, dans les autres cas. Démontrer que

$$\lim \frac{\mu(1)+\mu(2)+\mu(3)+\ldots+\mu(n)}{n}=\frac{36}{\pi^4},$$

si n augmente sans limite. On suppose $\mu(1)=1$.

16. R_p étant le reste de la division de n par p, démontrer que l'on a

$$\lim \frac{1}{n^2}[R_1+R_2+R_3+\ldots+R_n]=1-\frac{\pi^2}{12}=0,1775\ldots,$$

$$\lim \frac{1}{n}\left[R_1+\tfrac{1}{2}R_2+\tfrac{1}{3}R_3+\ldots+\frac{1}{n}R_n\right]=1-C=0,4227\ldots,$$

$$\lim \frac{1}{n^2}\left[R_1^2+\tfrac{1}{2}R_2^2+\tfrac{1}{3}R_3^2+\ldots+\frac{1}{n}R_n^2\right]$$
$$=\tfrac{3}{2}-C-\frac{\pi^2}{12}=0,1003\ldots,$$

lorsque n augmente indéfiniment. C est la *constante d'Euler*, 0,5772....

17. On considère les nombres de Bernoulli et d'Euler, définis par les égalités symboliques

$$(B+1)^p-B^p=p,$$
$$(E+1)^p+(E-1)^p=0$$

Démontrer la relation symbolique

$$f(2B+E)=2f(B)-f(2B)+f'(E).$$

En particulier,

$$(2B+E)^p = p\,E_{p-1} - (2^p - 2)B_p.$$

18. Ayant posé

$$H(x) = \int_0^1 \frac{1-\varphi^x}{1-\varphi}\,d\varphi,$$

démontrer la formule

$$H(2x) - \tfrac{1}{2}\left[H(x) + H\left(x-\tfrac{1}{2}\right)\right]\,l.2.$$

19. Soient S_n la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des plus grands nombres entiers contenus dans toutes les fractions de numérateur n ; et σ_n ce que devient cette somme lorsqu'on n'y considère que les fractions irréductibles. On a

$$\lim \frac{S_n}{\sigma_n} = 1 + \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{3^{p+1}} + \frac{1}{4^{p+1}} + \ldots,$$

pour n infini.

20. Soit

$$y_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang} x\,dx}{e^{2k\pi \operatorname{tang} x} - 1}.$$

Démontrer que l'expression

$$ln - \frac{4}{n}\left[y_{\frac{1}{n}} + y_{\frac{2}{n}} + y_{\frac{3}{n}} + \ldots + y_{\frac{n}{n}}\right]$$

tend vers

$$2 - C = 1{,}422784\ldots,$$

quand n augmente indéfiniment.

21. Le rapport entre la somme des carrés des côtés d'un triangle et le carré de la somme des côtés est *le plus fréquemment* égal à $\frac{3}{8}$.

22. Quand une épicycloïde roule sur une droite, le

centre de courbure correspondant au point de contact, se trouve sur une ellipse fixe.

23. Quand une *développante de cercle,* ou une *chaînette,* roulent sur une droite, le centre de courbure, correspondant au point de contact, se trouve sur une parabole fixe.

24. Classer et étudier les courbes telles que, quand elles roulent sur une droite, le centre de courbure, correspondant au point de contact, se trouve sur une conique fixe.

25. Ayant brisé une barre en n morceaux, la probabilité que l'on puisse, avec ces morceaux, former un polygone, est $1 - \frac{n}{2^{n-1}}$.

26. Il y a environ 17 à parier contre 8 qu'un triangle, de périmètre donné, est *obtusangle* plutôt que *acutangle.*

27. Toute médiane d'un triangle est *le plus fréquemment* égale au quart du périmètre.

(*A suivre.*)