NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

S. RÉALIS

Solutions des mêmes questions

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 429-431

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__429_1>

SOLUTIONS DES MÊMES QUESTIONS;

Par M. S. RÉALIS.

I. *La forme $y^4 - 6y^2z^2 + z^4$, où y et z sont différents de zéro, ne peut jamais représenter un carré.*

(Euler.)

Cela étant, l'équation

$$(x+\alpha)^4 - 6(x+\alpha)^2(x-\alpha)^2 + (x-\alpha)^4 = 4(2\alpha x + \beta)^2,$$

c'est-à-dire

$$x^4 - 2\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \alpha^4 + \beta^2 = 0,$$

est impossible en entiers α, β, x, excepté :

1° Pour $x = -\alpha$; d'où

$$\beta = 0 \quad \text{ou} \quad \beta = 4\alpha^2;$$

2° Pour $x = \alpha$; d'où

$$\beta = 0 \quad \text{ou} \quad \beta = -4\alpha^2.$$

De là l'énoncé I.

II. *La forme $y^4 + 6y^2z^2 + z^4$, dans laquelle y et z*

sont différents de zéro, ne peut jamais représenter un carré. (EULER.)

Donc l'équation

$$(x+\alpha)^4+6(x+\alpha)^2(x-\alpha)^2+(x-\alpha)^4=16(\alpha x-\beta)^2,$$

c'est-à-dire

$$x^4-2\alpha^2x^2+4\alpha\beta x+\alpha^4-2\beta^2=0,$$

est impossible en entiers α, β, x; excepté :

1° Pour $x=-\alpha$; dans ce cas, on a

$$\beta=0 \quad \text{ou} \quad \beta=-2\alpha^2;$$

2° Pour $x=\alpha$; auquel cas on a

$$\beta=0 \quad \text{ou} \quad \beta=2\alpha^2.$$

III. *La forme $4x^4+y^4$, dans laquelle x et y sont différents de zéro, ne peut jamais représenter un carré.* (EULER.)

Donc l'équation

$$4x^4+(x+\alpha)^4=(2x^2+\alpha x-\beta)^2,$$

c'est-à-dire

$$x^4+(5\alpha^2+4\beta)x^2+2\alpha(2\alpha^2+\beta)x+\alpha^4-\beta^2=0.$$

est impossible en entiers α, β, x; excepté :

Pour $x=0$; d'où $\beta=\pm\alpha^2$;

Pour $x=-\alpha$; d'où

$$\beta=-\alpha^2 \quad \text{ou} \quad \beta=3\alpha^2.$$

IV. *La forme $2x^4+y^4$, dans laquelle x est différent de zéro, ne peut jamais représenter un carré.* (EULER.)

D'après cela, l'équation

$$2x^4+(x-\alpha)^4=(2x^2-\alpha x-\beta)^2,$$

c'est-à-dire

$$x^4-(5\alpha^2+4\beta)x^2+2\alpha(2\alpha^2+\beta)x-(\alpha^4-\beta^2)=0,$$

ne peut être vérifiée en nombres entiers α, β, x, excepté pour $x = 0$; d'où $\beta = \pm \alpha^2$.

V. *La forme $y^4 - 4x^4$, dans laquelle x est différent de zéro, ne peut jamais représenter un carré.*

(EULER.)

Donc l'équation

$$(x - \alpha)^4 - 4x^4 = (x^2 - 2\alpha x - \beta)^2,$$

c'est-à-dire l'équation à coefficients entiers

$$x^4 - \frac{\alpha^2 + \beta}{2} x^2 + \alpha(\alpha^2 + \beta)x - \frac{\alpha^4 - \beta^2}{4} = 0,$$

où nous supposons que α et β sont des nombres entiers de même parité, est impossible pour x entier, excepté pour $x = 0$, $\beta = \pm \alpha^2$.