Nouvelles annales de mathématiques

E. Barisien

Composition mathématique pour l'admission à l'École centrale en 1883 (première session)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 422-426

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__422_1>

COMPOSITION MATHÉMATIQUE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1885

(PREMIÈRE SESSION);

SOLUTION PAR M. E. BARISIEN.

On donne deux axes Ox, Oy, *un point* A *sur* Ox, *un point* B *sur* Oy :

(¹) La fonction $\mu(x)$, égale à *zéro* lorsque x admet des diviseurs *carrés*, autres que l'unité, est égale, dans les autres cas, à ± 1, suivant que le nombre des *facteurs premiers* de x est *pair* ou *impair*. (Voir *Premier Mémoire d'Arithmétique*.)

1° *Former l'équation générale des paraboles telles que, pour chacune d'elles, Oy soit la corde de contact des tangentes menées du point* A, *et Ox la corde de contact des tangentes menées du point* B.

2° *Trouver le lieu des points de rencontre de chacune des paraboles avec celui de ses diamètres qui passe par un point* H *donné sur* Oy.

On déterminera un nombre de conditions géométriques suffisant pour pouvoir tracer le lieu, et l'on cherchera comment doit être placé le point H, *pour que le lieu se réduise à des droites.*

3° *Déterminer le paramètre variable que renferme l'équation générale du 1°, de façon qu'elle représente une parabole passant par un point donné* P, *et chercher dans quelles régions du plan doit se trouver le point* P, *pour que le problème soit possible.*

I.

Soient $OA = a$, $OB = b$, $OH = h$.

L'équation générale d'une parabole est

$$(Ax + By)^2 + 2Dx + 2Ey + 1 = 0. \tag{1}$$

La polaire d'un point (x, y) a pour équation

$$(Ax + By)(AX + BY) + D(X + x) + E(Y + y) + 1 = 0;$$

l'équation de la polaire du point A est, par suite,

$$Aa(AX + BY) + D(X + a) + EY + 1 = 0$$

ou

$$X(A^2a + D) + Y(ABa + E) + Da + 1 = 0.$$

Pour que cette droite se confonde avec l'axe des y, il faut que l'on ait

$$Da + 1 = 0, \tag{2}$$

$$ABa + E = 0 \tag{3}$$

Pour que la polaire du point B soit l'axe des x, il faut que l'on ait de même

$$(4)\qquad Eb + 1 = 0,$$

$$(5)\qquad ABb + D = 0.$$

Il semblerait que les quatre relations (2), (3), (4), (5) vont donner les valeurs de A, B, D, E; mais, en tenant compte des équations (2) et (4), les équations (3) et (5) rentrent l'une dans l'autre. Nous avons

$$D = -\frac{1}{a},\quad E = -\frac{1}{b},\quad ABab = 1.$$

L'équation générale des coniques satisfaisant aux conditions de l'énoncé est donc

$$(6)\qquad (Ax + By)^2 - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} + 1 = 0,$$

A et B étant liés par la relation

$$(7)\qquad ABab = 1.$$

II.

$(Ax + By) = 0$ représentant la direction de l'axe de la parabole, l'équation d'un diamètre passant par le point H est

$$(8)\qquad Ax + B(y - h) = 0.$$

Pour avoir le lieu demandé, il suffit d'éliminer A et B entre (6), (7) et (8). Or

$$\frac{A}{h-y} = \frac{B}{x} = \frac{Ax + By}{hx} = \frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{x(h-y)}} = \frac{1}{\sqrt{ab\,x(h-y)}}.$$

Donc

$$(Ax + By)^2 = \frac{h^2 x}{ab(h-y)}.$$

En égalant cette valeur de $(Ax + By)^2$ à celle donnée par l'équation (6), il vient, pour l'équation du lieu,

$$\frac{h^2 x}{ab(h-y)} = \left(\frac{2x}{a} + \frac{2y}{b} - 1\right)$$

ou, en ordonnant et réduisant,

$$(9) \quad 2ay^2 + 2bxy - hx(2b-h) - ay(b+2h) + abh = 0.$$

Ce lieu est donc une hyperbole passant par les trois points

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0, \\ y = h; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x = 0, \\ y = \dfrac{b}{2}; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{ab}{2b-h}, \\ y = 0. \end{array}\right.$$

Les équations du centre sont

$$2by - h(2b-h) = 0,$$
$$2bx + 4ay - a(b+2h) = 0.$$

On construira donc facilement le centre et, par suite, les asymptotes dont les directions sont parallèles aux droites représentées par l'équation

$$y(bx + ay) = 0.$$

Calculons le discriminant Δ de la conique représentée par l'équation (9).

On a

$$\Delta = 2a\,\frac{h^2(2b-h)^2}{4} - 2b\,\frac{ah(2b-h)(b+2h)}{4} + ab^3h$$

et, en réduisant,

$$\Delta = \frac{ah^2}{2}(b-h)^2.$$

Il en résulte que l'hyperbole se réduira à deux droites :

1° Pour $h = 0$, l'équation (9) devient

$$y(2bx + 2ay - ab) = 0.$$

2° Pour $h = b$, l'équation (9) devient, dans ce cas,

$$(2y - b)(bx + ay - ab) = 0.$$

III.

Exprimons que la parabole passe par un point donné $P(\alpha, \beta)$. On a

$$(10) \qquad (A\alpha + B\beta)^2 - \frac{2\alpha}{a} - \frac{2\beta}{b} + 1 = 0, \quad \text{avec} \quad AB = \frac{1}{ab}.$$

Ne conservons que le paramètre variable A. L'équation (10) devient

$$\left(A\alpha + \frac{\beta}{A\,ab}\right)^2 = \frac{2\alpha}{a} + \frac{2\beta}{b} - 1$$

et, en réduisant et ordonnant par rapport à A,

$$A^4 a^2 b^2 \alpha^2 - A^2 ab(2b\alpha + 2a\beta - ab - 2\alpha\beta) + \beta^2 = 0.$$

Cette équation en A^2 n'aura ses racines réelles que si

$$(2b\alpha + 2a\beta - ab - 2\alpha\beta)^2 - 4\alpha^2\beta^2 > 0$$

ou

$$(4\alpha\beta - 2b\alpha - 2a\beta + ab)(2b\alpha + 2a\beta - ab) < 0$$

ou

$$(2\alpha - a)(2\beta - b)(2b\alpha + 2a\beta - ab) < 0.$$

Si le point (α, β) est sur une des trois droites

$$(1) \qquad x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{b}{2}, \quad 2bx + 2ay - ab = 0,$$

il ne passe par ce point qu'une seule parabole satisfaisant à la question.

Soient A' le milieu de OA, B' le milieu de OB et C' le milieu de AB. Les côtés du triangle A'B'C', représentés par les équations (1), partagent le plan en deux régions. Si le point P est dans l'intérieur du triangle A'B'C', ou dans les angles opposés par le sommet aux angles intérieurs du triangle, il n'y a pas de parabole réelle. Si le point P est dans le reste du plan, il passe deux paraboles réelles par ce point.

La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.