NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CESÀRO

Dérivées des fonctions de fonctions

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 41-55

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__41_0>

DÉRIVÉES DES FONCTIONS DE FONCTIONS;

PAR M. E. CESARO.

1. *Fonctions de e^x.* — Soit, avant tout, $y = \varphi(e^x)$. Si l'on calcule, de proche en proche, y', y'', y''', ..., on est conduit à poser

$$y^{(p)} = \delta_{1,p}\frac{\varphi'(e^x)}{1}e^x + \delta_{2,p}\frac{\varphi''(e^x)}{1.2}e^{2x} + \delta_{3,p}\frac{\varphi'''(e^x)}{1.2.3}e^{3x} + \ldots,$$

les nombres δ, *indépendants de la nature de y*, étant nuls lorsque le premier indice est supérieur au second, ou inférieur à l'unité. Pour $\varphi(x) = x^m$, la dernière relation devient

$$(\delta - 1)^m = m^p,$$

pourvu que l'on remplace δ^r par $\delta_{r,p}$. Il en résulte immédiatement

$$\delta_{m,p} = \Delta^m(0^p),$$

puis

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} y^{(p)} &= \frac{\varphi'(e^x)}{1}e^x\Delta(0^p) \\ &+ \frac{\varphi''(e^x)}{1.2}e^{2x}\Delta^2(0^p) + \frac{\varphi'''(e^x)}{1.2.3}e^{3x}\Delta^3(0^p) + \ldots. \end{aligned}\right.$$

2. Il est aisé d'*invertir* la formule (1), en opérant comme nous l'avons fait dans notre article *Sur une équation aux différences mêlées*. On trouve l'égalité *symbolique*

$$(2)\quad e^{px}\varphi^{(p)}(e^x) = y(y-1)(y-2)\ldots(y-p+1).$$

3. *Applications.* — Dans le tome VI de la *Nouvelle Correspondance mathématique*, M. Leinekugel a démontré la formule (1) pour l'appliquer au développe-

ment de $\frac{1}{1-ae^x}$, suivant les puissances de x. Si l'on prend $\varphi(x) = \frac{1}{1-ax}$, la formule (1) donne, pour $x = 0$,

$$y^{(p)} = \frac{a\Delta(0^p)}{(1-a)^2} + \frac{a^2\Delta^2(0^p)}{(1-a)^3} + \frac{a^3\Delta^3(0^p)}{(1-a)^4} + \ldots$$

Tel est le coefficient de $\frac{x^p}{1.2.3\ldots p}$, dans le développement de $\frac{1}{1-ae^x}$.

4. De même, pour $\varphi(x) = (x-1)^m$, on voit que $\varphi^{(p)}(1)$, généralement nul, est égal à $m!$ lorsque $p = m$. D'après (1), on a donc, pour $x = 0$,

$$y^{(p)} = \Delta^m(0^p).$$

Il en résulte

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} (e^x - 1)^m = \frac{x^m}{m!}\Delta^m(0^m) &+ \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}\Delta^m(0^{m+1}) \\ &+ \frac{x^{m+2}}{(m+2)!}\Delta^m(0^{m+2}) + \ldots \end{aligned} \right.$$

5. Inversement, d'après (2), *l'expression symbolique*

$$\Delta(\Delta-1)(\Delta-2)\ldots(\Delta-p+1),$$

dans laquelle on remplace Δ^r *par* $\Delta^m(0^r)$, *est nulle si* m *est différent de* p.

6. Voici une autre application des formules (1) et (2). Prenons $\varphi(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. On trouve sans peine

$$\frac{\varphi^{(p)}(1)}{1.2.3\ldots p} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{p-1} \sin(p-1)\frac{\pi}{4}.$$

D'autre part, on sait que, E_p étant le $p^{\text{ième}}$ *nombre* *d'Euler*, on a

$$y = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = 1 + E_1 \frac{x}{1} + E_2 \frac{x^2}{1.2} + E_3 \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Cela posé, la relation (1) fournit cette remarquable formule

$$\begin{aligned} E_p = &- \frac{1}{4}[2\Delta^2(0^p) - 2\Delta^3(0^p) + \Delta^4(0^p)] \\ &+ \frac{1}{4^2}[2\Delta^6(0^p) - 2\Delta^7(0^p) + \Delta^8(0^p)] \\ &- \frac{1}{4^3}[2\Delta^{10}(0^p) - 2\Delta^{11}(0^p) + \Delta^{12}(0^p)] + \ldots, \end{aligned}$$

que l'on peut mettre sous la forme *symbolique*

$$E_p = -\frac{\Delta^2}{2 + 2\Delta + \Delta^2},$$

en convenant de remplacer, après développement, Δ^m par $\Delta^m(0^p)$. Par exemple,

$$\begin{aligned} E_{10} = &-(511 - 27\,990 + 204\,630) \\ &+ (2054430) - 3704400 + 1890000) - 113400 = -50521. \end{aligned}$$

7. Inversement, d'après (2), on peut écrire l'égalité *symbolique*

$$\begin{aligned} &E(E-1)(E-2)\ldots(E-p+1) \\ &= (-1)^{p-1} \frac{1.2.3\ldots p}{(\sqrt{2})^{p-1}} \sin(p-1)\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

8. *Intégrales définies.* — Multiplions les deux membres de l'égalité (3) par $\sin p\omega\, d\omega$, après avoir fait $x = e^{i\omega}$, et intégrons entre 0 et π, *en négligeant*, dans le second membre, la *partie réelle*. Pour rappeler cela, nous remplacerons par $\equiv$ le signe d'égalité. Il vient

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi (e^{e^{i\omega}} - 1)^m \sin p\omega\, d\omega \\ &\equiv i \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{\Delta^m(0^{m+\nu})}{(m+\nu)!} \int_0^\pi \sin(m+\nu)\omega \sin p\omega\, d\omega = i\frac{\pi}{2}\frac{\Delta^m(0^p)}{p!}, \end{aligned}$$

d'où

$$(4) \qquad \frac{\Delta^m(0^p)}{1.2.3\ldots p} = -\frac{2i}{\pi}\int_0^\pi (e^{\cos\omega + i\sin\omega} - 1)^m \sin p\omega \, d\omega.$$

Par substitution dans (1), on obtient, plus généralement,

$$\frac{y^{(p)}}{1.2.3\ldots p} = -\frac{2i}{\pi}\int_0^\pi \varphi(e^{x+\cos\omega + i\sin\omega}) \sin p\omega \, d\omega.$$

Par exemple, pour $\varphi(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ et $x = 0$, on trouve

$$\mathrm{E}_p = -\frac{4}{\pi}\, 1.2.3\ldots p \int_0^\pi \frac{(e^{\cos\omega} - e^{-\cos\omega})\sin(\sin\omega)\sin p\omega}{e^{2\cos\omega} + e^{-2\cos\omega} + 2\cos(2\sin\omega)}\, d\omega.$$

9. *Fonctions de* $\log x$. — Soit encore $y = \varphi(\log x)$. En opérant comme ci-dessus, on trouve la formule *symbolique*

$$(5) \qquad x^p y^{(p)} = \varphi(\varphi - 1)(\varphi - 2)\ldots(\varphi - p + 1),$$

où l'on doit remplacer, après développement, φ^r par $\varphi^{(r)}(\log x)$. Inversement

$$\varphi^{(p)}(\log x) = \frac{xy'}{1}\Delta(0^p) + \frac{x^2 y''}{1.2}\Delta^2(0^p) + \frac{x^3 y'''}{1.2.3}\Delta^3(0^p) + \ldots.$$

10. *Intégrales définies.* — En employant (4) et en remplaçant $\log x$ par x, la dernière formule devient

$$\frac{\varphi^{(p)}(x)}{1.2.3\ldots p} = -\frac{2i}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x + e^{i\omega}) \sin p\omega \, d\omega.$$

Cette formule, *à peu près évidente,* a de nombreuses conséquences.

11. *Cas général.* — Au lieu de nous arrêter à l'examen d'autres cas particuliers, considérons, en général,

$$y = \varphi(u), \quad u = \psi(x).$$

Pour cela, il faut que nous démontrions quelques propriétés d'un important algorithme. Rappelons d'abord que, ayant toutes les solutions *entières* et *positives* de l'équation

$$r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_m = p,$$

on appelle *algorithme isobarique* d'une fonction $f(r)$, et l'on désigne par $\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}} f(r)$, *la somme de tous les produits analogues à*

$$f(r_1) f(r_2) f(r_3) \ldots f(r_m).$$

Or c'est l'algorithme

$$\mathrm{U}_{p,m}(x) = \overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}} \left(\frac{u^{(r)}}{1.2.3\ldots r} \right),$$

que nous voulons considérer d'une manière spéciale.

12. *Propriété fondamentale.* — Pour plus de simplicité, désignons par ε_r la fonction soumise au signe algorithmique. Prenons un terme

$$\varepsilon_{r_1} \varepsilon_{r_2} \varepsilon_{r_3} \ldots \varepsilon_{r_m} \quad (r_1 + r_2 + \ldots + r_m = p)$$

de $\mathrm{U}_{p,m}(x)$. A cause de $\varepsilon'_r = (r+1)\varepsilon_{r+1}$, il est clair que sa dérivée est

$$(6) \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=m} (r_\nu + 1) \varepsilon_{r_1} \varepsilon_{r_2} \ldots \varepsilon_{r_{\nu-1}} \varepsilon_{r_\nu+1} \varepsilon_{r_{\nu+1}} \ldots \varepsilon_{r_m}.$$

Pour que l'un de ces termes coïncide avec *un terme donné*

$$(7) \qquad \varepsilon_{\rho_1} \varepsilon_{\rho_2} \varepsilon_{\rho_3} \ldots \varepsilon_{\rho_m} \quad (\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_m = p + 1)$$

de $\mathrm{U}_{p+1,m}(x)$, il faut que

$$r_1 = \rho_1, \;\ldots,\; r_{\nu-1} = \rho_{\nu-1},\; r_\nu = \rho_\nu - 1,\; r_{\nu+1} = \rho_{\nu+1},\; \ldots,\; r_m = \rho_m,$$

et, par conséquent, ρ_ν doit être *supérieur à l'unité*. Si cela a lieu, le terme (7) se trouve ρ_ν fois dans $U'_{p,m}(x)$, comme on le voit par (6). Il en résulte que le terme (7) est contenu dans $U'_{p,m}(x)$ un nombre de fois égal à la *somme des quantités* ρ *supérieures à l'unité*, c'est-à-dire $p+1-N$ fois, N étant le *nombre des quantités* ρ *égales à l'unité*. D'autre part, considérons les termes

$$\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\varepsilon_{r_3}\ldots\varepsilon_{r_{m-1}} \qquad (r_1+r_2+\ldots+r_{m-1}=p)$$

de $U_{p,m-1}(x)$, et multiplions par ε_1 chacun d'eux, en écrivant ce facteur aux m places qu'il peut occuper, de la manière suivante :

$$\varepsilon_1\varepsilon_{r_1}\ldots\varepsilon_{r_{m-1}},\quad \varepsilon_{r_1}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{r_{m-1}},\quad \ldots,\quad \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\ldots\varepsilon_1.$$

Dans le Tableau ainsi formé, le terme (7) se trouve N fois, tandis que la somme de tous les termes est, évidemment, $m\varepsilon_1 U_{p,m-1}(x)$. En résumé, le terme (7) est contenu $p+1$ fois dans $U'_{p,m}(x)+m\varepsilon_1 U_{p,m-1}(x)$. Conséquemment

$$(8)\qquad U'_{p,m}(x)=(p+1)U_{p+1,m}(x)-mu'U_{p,m-1}(x).$$

Pour que cette relation subsiste sans limitations, nous conviendrons de supposer $U_{p,m}=0$, lorsque m est supérieur à p ou inférieur à 1.

13. *Formule générale.* — Revenons à la fonction y, et démontrons que

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{y^{(p)}}{1.2.3\ldots p} &= \frac{\varphi'(u)}{1}U_{p,1}(x) \\ &+\frac{\varphi''(u)}{1.2}U_{p,2}(x)+\frac{\varphi'''(u)}{1.2.3}U_{p,3}(x)+\ldots,\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{p!}\frac{d^py}{dx^p}=\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\left[\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu y}{du^\nu}\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{\nu}\left(\frac{1}{r!}\frac{d^ru}{dx^r}\right)\right].$$

Admettons, pour un instant, que cette formule, évidente pour $p = 1$, soit vraie pour les valeurs $1, 2, 3, \ldots, p$ de p, et démontrons qu'elle subsiste pour la valeur $p+1$. Pour atteindre ce but, il suffit de prendre les dérivées des deux membres et d'avoir égard à la relation fondamentale (8). On doit observer que *cette démonstration ne suppose aucunement que les fonctions considérées soient développables par la formule de Taylor.*

14. *Exemple.* — Soient $u = \frac{1}{x}$ et, par suite,

$$\varepsilon_r = \frac{(-1)^r}{x^{r+1}}.$$

Un terme quelconque de $U_{p,m}$ est

$$\frac{(-1)^{r_1}}{x^{r_1+1}}\frac{(-1)^{r_2}}{x^{r_2+1}}\cdots\frac{(-1)^{r_m}}{x^{r_m+1}} = \frac{(-1)^p}{x^{p+m}}.$$

Tous les termes de $U_{p,m}$ sont donc égaux : leur nombre est, d'ailleurs, celui des solutions *entières* et *positives* de l'équation $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = p$, c'est-à-dire $C_{p-1,m-1}$. Conséquemment

$$U_{p,m}(x) = \mathop{\mathbf{S}}_{p}^{m}\left[\frac{(-1)^r}{x^{r+1}}\right] = (-1)^p \frac{C_{p-1,\,m-1}}{x^{p+m}}.$$

La relation (9) devient

$$(-1)^p \frac{x^p y^{(p)}}{1.2.3\ldots p} = \frac{\varphi'\left(\frac{1}{x}\right)}{x} + \frac{C_{p-1,1}}{1.2}\frac{\varphi''\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} + \frac{C_{p-1,2}}{1.2.3}\frac{\varphi'''\left(\frac{1}{x}\right)}{x^3} + \ldots.$$

Telle est la formule qui donne la $p^{\text{ième}}$ *dérivée des fonctions de* $\frac{1}{x}$.

15. Lorsque l'expression de la $p^{\text{ième}}$ dérivée d'une fonction de fonction est connue, la comparaison avec les formules précédentes donne lieu à des égalités isobariques, plus ou moins intéressantes. Ainsi, pour $u = e^x$, on a

$$\mathrm{U}_{p,m}(x) = \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m}\left(\frac{e^x}{1.2.3\ldots r}\right) = e^{mx}\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m}\left(\frac{1}{1.2.3\ldots r}\right).$$

La comparaison des formules (1) et (9) donne, pour les différences de 0^p, cette intéressante expression isobarique

$$\frac{\Delta^m(0^p)}{p!} = \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m}\left(\frac{1}{r!}\right).$$

De même, pour $u = \log x$, on a

$$\mathrm{U}_{p,m}(x) = \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m}\left[\frac{(-1)^{r+1}}{r x^r}\right] = \frac{(-1)^{p+m}}{x^p}\mathop{\mathrm{S}}_{v}^{m}\left(\frac{1}{r}\right).$$

La comparaison des formules (5) et (9) montre, ensuite, que *la somme des produits* ν *à* ν *des* $p-1$ *premiers nombres entiers est égale à*

$$p(p-1)(p-2)\ldots(p-\nu+1)\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{p-\nu}\left(\frac{1}{r}\right).$$

D'après cela, on a

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\left[\frac{\alpha^\nu}{\nu!}\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{\nu}\left(\frac{1}{r}\right)\right] = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1)}{1.2\ldots p}.$$

En particulier, pour $\alpha = 1$, on retrouve une formule donnée par Cauchy dans ses *Exercices*.

16. La relation (9) comprend comme cas très particuliers, pour différentes formes de la fonction φ, *toutes*

les formules contenues dans notre article *Algorithme isobarique*, et démontrées, par une autre voie, dans le *Journal de Battaglini*. Par exemple, pour

$$\varphi(x) = \frac{1}{x},$$

il vient

$$\frac{y^{(p)}}{1.2.3\ldots p} = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} [(-1)^\nu y^{\nu+1} \mathrm{U}_{p,\nu}(x)].$$

En particulier, pour $u = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ et $x = 0$,

$$\frac{\mathrm{E}_{2p}}{1.2.3\ldots 2p} = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left[(-1)^\nu \overset{\nu}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left(\frac{1}{1.2.3\ldots 2r}\right)\right].$$

Pour $u = \frac{1}{x}(1 - e^{-x})$ et $x = 0$,

$$\frac{\mathrm{B}_p}{1.2.3\ldots p} = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left\{(-1)^{\nu+p} \overset{\nu}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left[\frac{1}{1.2.3\ldots(r+1)}\right]\right\}.$$

Telles sont les expressions isobariques des *nombres d'Euler et de Bernoulli*.

17. Autre exemple, bien remarquable. En faisant successivement $\varphi(x) = e^x$, $\varphi(x) = \log x$, et $x = 0$ dans la formule (9), on obtient

$$\frac{y^{(p)}}{p!} = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left[\frac{1}{\nu!} \overset{\nu}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left(\frac{u^{(r)}}{r!}\right)\right],$$

$$\frac{u^{(p)}}{p!} = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left[\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} \overset{\nu}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left(\frac{y^{(r)}}{r!}\right)\right].$$

Cela posé, désignons respectivement par s_r, c_r les sommes des $r^{\text{ièmes}}$ *puissances* et des *produits* r *à* r de quantités quelconques $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Soit

$$y = (1+\alpha x)(1+\beta x)(1+\gamma x)\ldots = e^u.$$

Il est clair que, pour $x = 0$,

$$\frac{y^{(r)}}{r!} = c_r, \quad \frac{u^{(r)}}{r!} = \frac{s_r}{r}.$$

Les formules précédentes deviennent donc

$$c_p = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left[\frac{(-1)^{p+\nu}}{\nu!} \overset{\nu}{\underset{p}{\mathrm{S}}} \left(\frac{s_r}{r} \right) \right],$$

$$s_p = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left[(-1)^{p+\nu} \frac{p}{\nu} \overset{\nu}{\underset{p}{\mathrm{S}}} (c_r) \right].$$

18. *Interprétation de l'algorithme* U. — Soit a la valeur de u, pour $x = \xi$. Si l'on fait $\varphi(x) = (x-a)^m$, et $x = \xi$, la formule (9) devient

$$\frac{y^{(p)}}{1.2.3\ldots p} = \mathrm{U}_{p,m}(\xi).$$

Par conséquent, entre les limites d'application du théorème de Taylor à la fonction $u = \psi(x)$, on pourra écrire

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} [\psi(x) - \psi(\xi)]^m = {} & (x-\xi)^m \,\mathrm{U}_{m,m}(\xi) \\ & + (x-\xi)^{m+1} \,\mathrm{U}_{m+1,m}(\xi) \\ & + (x-\xi)^{m+2} \,\mathrm{U}_{m+2,m}(\xi) + \ldots. \end{aligned} \right.$$

La formule (3) se trouve ainsi généralisée.

19. *Intégrales définies.* — Multiplions les deux membres de (10) par $\sin p\omega \, d\omega$, après avoir fait

$$x - \xi = e^{i\omega}$$

et remplacé ξ par x. Intégrons ensuite entre 0 et π, en négligeant, dans le second membre, la partie réelle.

Il vient

$$\int_0^\pi [\psi(x+e^{i\omega})-\psi(x)]^m \sin p\omega \, d\omega$$

$$-i\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} U_{m+\nu,m}(x)\int_0^\pi \sin(m+\nu)\omega \sin p\omega \, d\omega = i\frac{\pi}{2}U_{p,m}(x)$$

d'où

$$(11)\quad U_{p,m}(x)=-\frac{2i}{\pi}\int_0^\pi [\psi(x+e^{i\omega})-\psi(x)]^m \sin p\omega \, d\omega.$$

20. *Algorithme isobarique de* $\frac{1}{r+1}$. — La fonction dont nous avons parlé dans notre article *Propriétés d'une fonction arithmétique* n'est autre que l'algorithme

$$\sigma_{p,m}=\underset{p}{\overset{m}{\mathbf{S}}}\left(\frac{1}{r+1}\right),$$

que l'on rencontre dans la dérivation des fonctions de $u=\frac{1}{x}\log(1+x)$. En effet, pour cette forme de u, on a

$$U_{p,m}(0)=\underset{p}{\overset{m}{\mathbf{S}}}\left[\frac{(-1)^r}{r+1}\right]=(-1)^p\sigma_{p,m}.$$

Par conséquent, en vertu de (9),

$$(-1)^p\frac{y^{(p)}}{1.2.3\ldots p}=\frac{\varphi'(1)}{1}\sigma_{p,1}+\frac{\varphi''(1)}{1.2}\sigma_{p,2}+\frac{\varphi'''(1)}{1.2.3}\sigma_{p,3}+\ldots.$$

Par exemple, pour $\varphi(x)=e^x$, on obtient le développement

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(-1)^\nu\left(\frac{\sigma_{\nu,1}}{1}+\frac{\sigma_{\nu,2}}{1.2}+\frac{\sigma_{\nu,3}}{1.2.3}+\ldots\right)x^\nu,$$

donné dans l'article cité.

21. *Algorithmes* V *et* W. — Nous ajouterons quelques mots sur deux autres importants algorithmes, à savoir

$$V_{p,m}(x)=\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m}[u^{(r)}],\quad W_{p,m}(x)=\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m}\left[\frac{u^{(r)}}{1.2.3\ldots(r-1)}\right].$$

Dans cette Note, c'est le dernier algorithme qui attirera spécialement notre attention. Quant au premier, nous nous bornerons à faire remarquer la relation fondamentale

$$V'_{p,m}(x)=m[V_{p+1,m}(x)-V_{p,m-1}(x)],$$

que l'on obtient par des considérations fort simples, analogues à celles qui nous ont servi à établir l'égalité (8). C'est de la même manière que l'on obtient la relation

$$(12)\qquad W'_{p,m}(x)=(p-m+1)W_{p+1,m}(x).$$

Il suffit d'observer que, si l'on continue à représenter par ε_r la fonction soumise au signe algorithmique, on a $\varepsilon'_r=r\varepsilon_{r+1}$, et, par suite, le terme (7) se trouve, dans $W'_{p,m}(x)$, un nombre de fois égal à la *somme des quantités* ρ *supérieures à l'unité*, diminuée du *nombre des mêmes quantités*, c'est-à-dire à

$$(p+1-N)-(m-N)=p-m+1.$$

22. La formule (12) permet de développer $W_{p,m}(x)$ suivant les puissances ascendantes de x, lorsqu'un tel développement est possible. En effet, il est évident que

$$(13)\quad W^{(k)}_{p,m}(x)=(p-m+1)(p-m+2)\ldots(p-m+k)W_{p+k,m}(x).$$

Par suite, s'il est permis de poser

$$W_{p,m}(x)=A^{(p)}_{0,m}+A^{(p)}_{1,m}\frac{x}{1}+A^{(p)}_{2,m}\frac{x^2}{1.2}+A^{(p)}_{3,m}\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots,$$

on a nécessairement

$$A_{k,m}^{(p)} = (p-m+1)(p-m+2)\ldots(p-m+k)\,A_{0,m}^{(p+k)}.$$

Il en résulte la formule *symbolique*

$$W_{p,m}(x) = \frac{A_{0,m}^{(p)}}{(1-A_{0,m}x)^{p-m+1}}.$$

En d'autres termes,

$$\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m}\left[\frac{\psi^{(r)}(x)}{(r-1)!}\right] = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\left\{C_{p-m+\nu,\nu}\,x^{\nu}\mathop{\mathrm{S}}_{p+\nu}^{m}\left[\frac{\psi^{(r)}(0)}{(r-1)!}\right]\right\}.$$

23. Pour montrer toute l'utilité de ces formules, commençons par appliquer la formule (13) à la détermination de l'algorithme

$$\tau_{p,m} = \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m}\left[\frac{1}{(r-1)!}\right].$$

Pour $u = e^x$, il est clair que

$$W_{p,m}(x) = \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m}\left[\frac{e^x}{(r-1)!}\right] = e^{mx}\tau_{p,m}.$$

Par conséquent, en vertu de (13),

$$m^k\tau_{p,m} = (p-m+1)(p-m+2)\ldots(p-m+k)\,\tau_{p+k,m}.$$

On en déduit facilement

$$\tau_{p,m} = \frac{m^{p-m}}{1.2.3\ldots(p-m)}.$$

24. De même, soit

$$\theta_{p,m} = \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m}\left[\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{r-1}\right)\right].$$

Pour $u = \frac{1}{x^\alpha}$, on a

$$W_{p,m}(x) = (-1)^p \frac{\alpha^m}{x^{m\alpha+p}} \theta_{p,m}.$$

puis, la formule (13) donne

$$\theta_{p,m} = C_{p+m\alpha-1,\,p-m}.$$

C'est là un résultat curieux au point de vue de la partition des nombres. Si l'on considère toutes les solutions, *entières* et *positives*, de l'équation

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_m = p,$$

on trouve d'abord, pour $\alpha = 0$, que leur nombre est $C_{p-1,\,m-1}$. On voit ensuite, pour $\alpha = 1$, que l'on a

$$\Sigma r_1 r_2 \ldots r_m = C_{m+p-1,\,2m-1}, \quad \text{etc.}$$

25. Ces résultats trouvent, en outre, une application utile dans la recherche des dérivées des fonctions de fonctions. Ainsi, pour $u = xe^x$ et $x = 0$, la formule (9) donne, en tenant compte de la valeur de l'algorithme τ,

$$y^{(p)} = C_{p,1}\, 1^{p-1} \varphi'(0) + C_{p,2}\, 2^{p-2} \varphi''(0) + C_{p,3}\, 3^{p-3} \varphi'''(0) + \ldots.$$

De même, par l'algorithme θ, on obtient, en supposant $u = \frac{x}{(1-x)^{\alpha+1}}$ et $x = 0$,

$$\frac{y^{(p)}}{1.2.3\ldots p} = C_{p+\alpha-1,\,p-1} \frac{\varphi'(0)}{1}$$
$$+ C_{p+2\alpha-1,\,p-2} \frac{\varphi''(0)}{1.2} + C_{p+3\alpha-1,\,p-3} \frac{\varphi'''(0)}{1.2.3} + \ldots;$$

. . . .

26. Pour finir, nous ferons observer que chacun de ces algorithmes peut être mis sous forme d'intégrale définie, moyennant la formule (11), pourvu que le développement (10) soit légitime. Ainsi, en cherchant à exprimer l'algorithme ϖ, on trouve

$$\int_0^\pi e^{m\cos\omega}\sin(m\omega + m\sin\omega)\sin p\omega\, d\omega = \frac{\pi}{2}\,\frac{m^{p-m}}{1.2.3\ldots(p-m)}.$$