

E. CESÀRO

**Généralisation de l'identité de MM.  
Tchébychew et De Polignac**

*Nouvelles annales de mathématiques* 3<sup>e</sup> série, tome 4  
(1885), p. 418-422

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1885\\_3\\_4\\_\\_418\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__418_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**GÉNÉRALISATION DE L'IDENTITÉ DE MM. TCHÉBYCHEW  
ET DE POLIGNAC;**

PAR M. E. CESARO.

1.  $p(x)$  étant le produit des nombres premiers, non supérieurs à  $x$ , soit

$$(1) \quad P_1(x) = p\left(\frac{x}{p}\right) p\left(\frac{x}{p^2}\right) p\left(\frac{x}{p^3}\right) \dots;$$

ou a identiquement

$$(2) \quad P_1\left[\frac{n}{1}\right] P_1\left[\frac{n}{2}\right] P_1\left[\frac{n}{3}\right] \dots = {}_1P_r\left[\frac{n}{p}\right] {}_2P_r\left[\frac{n}{p^2}\right] {}_3P_r\left[\frac{n}{p^3}\right] \dots$$

Dans cette égalité,  $P_r(x)$  représente la quotité des nombres entiers, non supérieurs à  $x$ , et n'admettant pas de diviseurs, autres que 1, qui soient des puissances  $r^i$  mes parfaites.

2. Soit  $f(x)$  une fonction de  $x$ , généralement égale à l'unité, sauf lorsque  $x = \pi^m$ ,  $\pi$  étant un nombre premier quelconque, et  $m$  étant divisible par  $r$  : dans ce cas,  $f(x) = \pi$ . Cela posé, désignons par  $a, b, c, \dots$  tous les diviseurs de  $x$ , et évaluons, en fonction des facteurs premiers  $u, v, w, \dots$  de  $x$ , le produit

$$f(a)f(b)f(c)\dots$$

Soit  $x = u^\alpha v^\beta w^\gamma \dots$ . On a

$$f(u^r) = f(u^{2r}) = f(u^{3r}) = \dots = f\left(u\left[\frac{\alpha}{r}\right]\right) = u.$$

$$f(v^r) = f(v^{2r}) = f(v^{3r}) = \dots = f\left(v\left[\frac{\beta}{r}\right]\right) = v.$$

.....

Il est évident qu'il n'y a pas d'autres diviseurs de  $x$

pour lesquels la fonction  $f$  soit différente de l'unité; par conséquent

$$f(a)f(b)f(c)\dots = u\left[\frac{\alpha}{r}\right]v\left[\frac{\beta}{r}\right]w\left[\frac{\gamma}{r}\right]\dots = d_r(x),$$

pourvu que l'on représente par  $d_r^x(x)$  le plus grand diviseur de  $x$ , puissance  $r^{\text{ième}}$  parfaite. Si l'on observe que les nombres  $\frac{x}{a}, \frac{x}{b}, \frac{x}{c}, \dots$  sont égaux, dans un certain ordre, aux nombres  $a, b, c, \dots$ , on peut écrire

$$f\left(\frac{x}{a}\right)f\left(\frac{x}{b}\right)f\left(\frac{x}{c}\right)\dots = d_r(x).$$

3. Dans la dernière relation, faisons successivement  $x = 1, 2, 3, \dots, n$ , et multiplions membre à membre toutes les égalités obtenues. Le nombre  $t$  entre, dans le premier membre, en dénominateur, pour les valeurs suivantes de  $x$ ,

$$t, 2t, 3t, \dots \left[\frac{n}{t}\right]t,$$

et, par conséquent, il donne lieu au produit

$$f\left[\frac{t}{t}\right]f\left[\frac{2t}{t}\right]\dots f\left(\frac{\left[\frac{n}{t}\right]t}{t}\right) = f_{(1)}f_{(2)}\dots f\left[\frac{n}{t}\right],$$

égal à  $P_r\left[\frac{n}{t}\right]$ , si l'on pose

$$(3) \quad P_r(x) = f_{(1)}f_{(2)}f_{(3)}\dots f_{(x)}.$$

Faisant varier  $t$ , depuis 1 jusqu'à  $n$ , on obtient

$$(4) \quad P_r\left[\frac{n}{1}\right]P_r\left[\frac{n}{2}\right]P_r\left[\frac{n}{3}\right]\dots = d_{r(1)}d_{r(2)}\dots d_{r(n)}.$$

4. La fonction  $P_r$  est définie par la relation (3), que l'on peut mettre sous une autre forme. A cet effet, distinguons parmi les  $x$  premiers nombres naturels : 1<sup>o</sup> ceux qui sont des puissances  $r^{\text{ièmes}}$  parfaites de nombres

premiers, et dont les racines  $r^{\text{ièmes}}$  sont, par conséquent, tous les nombres premiers, non supérieurs à  $x^{\frac{1}{r}}$ ; ces nombres donnent lieu, dans le second membre de (3), au produit  $p\left(x^{\frac{1}{r}}\right)$ ; 2<sup>o</sup> ceux qui sont des puissances  $(2r)^{\text{ièmes}}$  parfaites de nombres premiers, et dont les racines  $(2r)^{\text{ièmes}}$  sont, par conséquent, tous les nombres premiers, non supérieurs à  $x^{\frac{1}{2r}}$ ; ces nombres donnent lieu, dans le second membre de (3), au produit  $p\left(x^{\frac{1}{2r}}\right)$ ; 3<sup>o</sup> etc. D'après cela, on peut écrire

$$P_r(x) = p\left(x^{\frac{1}{r}}\right)p\left(x^{\frac{1}{2r}}\right)p\left(x^{\frac{1}{3r}}\right)\dots,$$

ainsi que le suppose la relation (1).

5. Transformons aussi le second membre de l'égalité (4). A cet effet, observons que, pour avoir  $d_r(x) = t$ , il faut d'abord que  $x$  soit un multiple de  $t^r$  : il faut, ensuite, que le quotient de  $x$  par  $t^r$  n'admette pas de diviseurs, autres que 1, qui soient des puissances  $r^{\text{ièmes}}$  parfaites. Le nombre des valeurs de  $x$ , non supérieures à  $n$ , pour lesquelles  $d_r(x) = t$ , est donc égal à la quotité des nombres, non supérieurs à  $\frac{n}{t^r}$  et n'admettant pas de diviseurs autres que 1, qui soient des puissances  $r^{\text{ièmes}}$  parfaites. L'identité (2) est donc démontrée.

6. *Remarque.* — Pour  $r = 1$ , on a  $F_1(x) = 1$ , pourvu que  $x$  ne soit pas nul. Dans ce cas, on a toujours  $F_r(0) = 0$ . Conséquemment, l'identité (2) devient

$$P_1\left[\frac{n}{1}\right] P_1\left[\frac{n}{2}\right] P_1\left[\frac{n}{3}\right] \dots = 1.2.3 \dots n.$$

C'est l'identité de MM. Tchebychew et de Polignac.

Il est probable que l'identité (2) conduit aussi à une généralisation des intéressants résultats auxquels MM. Tchebychew et de Polignac sont parvenus, dans le cas particulier de  $r = 1$ . Il convient, toutefois, de faire observer que  $P_r$  n'est pas une fonction essentiellement nouvelle, car elle dépend de  $P_1$  par la relation

$$P_r(x) = P_1(\sqrt[r]{x}).$$

La formule (2) exprime donc une propriété de la fonction  $P_1(x) = e^{\chi(x)}$ , sur laquelle nous reviendrons ultérieurement, en la considérant comme le *plus petit multiple commun des  $x$  premiers nombres naturels* (1).

7. On reconnaît aisément que, si l'on représente par  $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \dots$  la série des nombres premiers 2, 3, 5, ..., on a

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} F_r(x) &= x - \sum \left[ \frac{x}{\varpi_1^r} \right] \\ &\quad + \sum \left[ \frac{x}{\varpi_1^r \varpi_2^r} \right] - \sum \left[ \frac{x}{\varpi_1^r \varpi_2^r \varpi_3^r} \right] + \dots \end{aligned} \right.$$

Asymptotiquement,

$$F_r(x) = x \left( 1 - \frac{1}{\varpi_1^r} \right) \left( 1 - \frac{1}{\varpi_2^r} \right) \left( 1 - \frac{1}{\varpi_3^r} \right) \dots = \frac{x}{s_r}.$$

Nous déduisons de là ce théorème :

*La probabilité qu'un nombre entier n'admette pas de diviseurs, autres que 1, qui soient des puissances  $r$ èmes parfaites, est exprimée par l'inverse de la somme*

$$1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \dots$$

En particulier, pour  $r = 4$ , on trouve qu'il y a envi-

---

(1)  $\chi(x)$  est la fonction de Tchebychew. D'après M. Halphen, elle est asymptotique à  $x$ .

ron douze à parier contre un qu'un nombre entier, pris au hasard, n'admet pas de diviseurs bicarrés, autres que l'unité.

8. La formule (5) peut être mise sous la forme

$$F_r(x) = \left[ \frac{x}{1^r} \right] \mu(1) + \left[ \frac{x}{2^r} \right] \mu(2) + \left[ \frac{x}{3^r} \right] \mu(3) + \dots (1),$$

et l'on peut alors en déduire, avec plus de rigueur, l'expression asymptotique de  $F_r(x)$ . Observons, à cet effet, que, dans le second membre, les termes dont le rang est supérieur à  $x^{\frac{1}{r}}$  sont nuls. On peut donc, à chaque quotient  $\left[ \frac{x}{t^r} \right]$ , substituer  $\frac{x}{t^r}$ ; car, en opérant ainsi, on vient à négliger une quantité certainement inférieure à la valeur absolue de  $\mu(1) + \mu(2) + \dots + \mu\left(x^{\frac{1}{r}}\right)$ , et, partant, d'un ordre non supérieur à celui de  $x^{\frac{1}{r}}$ . Conséquemment, si  $r$  surpasse 1, on peut écrire

$$F_r(x) = x \sum_{t=1}^{t=\infty} \frac{\mu(t)}{t^r} = \frac{x}{s_r}.$$