Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 379-390

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__379_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1451

(voir 3ᵉ série, t. II, p. 333);

PAR M. FAUQUEMBERGUE,

Professeur au lycée de Nice.

Démontrer que si les deux racines de l'équation

$$z^2 - 3\alpha z - (\alpha^3 - \beta^2) = 0$$

sont entières, l'équation indéterminée

$$(\mathrm{A}) \qquad x^3 + k = y^2,$$

dans laquelle on a pris

$$k = [(\alpha + 1)^3 - (\beta + 1)^2]\, z,$$

admet toujours une solution entière. (RÉALIS.)

Posons

$$x = \alpha - z, \quad y = \beta - z,$$

α, β, z désignant trois entiers indéterminés.

L'équation (A) pourra se mettre sous la forme

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} k = {} & z^2 - 3\alpha z - (\alpha^3 - \beta^2) \\ & + (z^2 - 3\alpha z + 3\alpha^2 + 3\alpha - 2\beta)\, z. \end{aligned} \right.$$

On voit qu'elle sera vérifiée, si l'on a, à la fois,

$$z^2 - 3\alpha z - (\alpha^3 - \beta^2) = 0$$

et

$$k = (z^2 - 3\alpha z + 3\alpha^2 + 3\alpha - 2\beta)\, z;$$

ou, en tenant compte de la première de ces deux équations,

$$k = (\alpha^3 - \beta^2 + 3\alpha^2 + 3\alpha - 2\beta)\, z,$$

ce qui revient à

$$k = [(\alpha + 1)^3 - (\beta + 1)^2] z.$$

Le théorème énoncé est ainsi démontré.

Question 1504

(voir 3e série, t. III, p. 447);

PAR M. N. GOFFART.

Le triangle ABC *rectangle en* A *est inscrit dans une hyperbole équilatère, les tangentes à cette courbe aux points* B *et* C *se coupent en* T; *la normale au point* B *coupe le côté* AC *au point* B′, *la normale au point* C *coupe le côté* AB *au point* C′. *Démontrer que l'angle* B′TC′ *est égal à l'angle des tangentes.* (D'OCAGNE.)

Soient $xy = 1$ l'équation de l'hyperbole, et (a, a'), (b, b'), (c, c') les coordonnées des sommets A, B, C. L'angle A sera droit si l'on a

$$a^2 bc + 1 = 0. \tag{1}$$

Les équations des tangentes BT et CT sont respectivement

$$bY + b'X = 2, \quad cY + c'X = 2.$$

Ces tangentes se coupent au point T, dont les coordonnées sont

$$X = \frac{2bc}{b + c}, \quad Y = \frac{2}{b + c}.$$

On a

$$\operatorname{tang} BTC = \frac{b^2 - c^2}{1 + b^2 c^2}.$$

Or l'équation de la normale en B est

$$b'Y - bX = b'^2 - b^2;$$

et celle du côté AC

$$acY + X = a + c;$$

l'équation d'une droite passant par leur point d'intersection est

$$\lambda(b'Y - bX + b^2 - b'^2) + acY + X - (a - c) = 0.$$

Cette droite passera au point T si

$$\lambda = \frac{b^2(a - c)}{b^4 - 1}.$$

Le coefficient d'inclinaison de B'T est donc

$$\frac{b^3(a - b - c) - 1}{(ab - bc + ac) + ab^4c},$$

et l'on a celui de C'T par symétrie

$$\frac{c^3(a - b - c) - 1}{(ab - bc + ac) + abc^4};$$

d'ou résulte

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} B'TC' &= \frac{(b^2 - c^2)(a - b)(a - c)(b^2 + bc + c^2)}{(1 + b^2c^2)(a - b)(a - c)(b^2 + bc + c^2)} \\ &= \frac{b^2 - c^2}{1 + b^2c^2} = \operatorname{tang} BTC. \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Nota. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1506

(voir 3e série, t. III, p. 44.)

PAR M. JUHEL-RENOY.

Soient CA, CB *deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse; et* P, Q *deux points de* CA, CB *prolongés, tels que* AP.BQ = 2CA.CB. *Démontrer que* BP *et* AQ *se coupent sur l'ellipse.* (GENESE, M.-A.)

Prenons pour axes de coordonnées les deux droites

CA, CB; et soient

$$CA = a, \quad CB = b, \quad AP = l, \quad Bq = l'.$$

L'équation de l'ellipse est

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

et les équations des droites BP, AQ sont

$$bx + (a + l)y = b(a + l)$$
$$(b + l')x + ay = a(b + l');$$

d'où

$$bx + ay - ab = l(b - y),$$
$$bx + ay - ab = l'(a - x);$$

multiplions ces deux dernières équations, membre à membre, et introduisons la condition $ll' = 2ab$; nous aurons l'équation de l'ellipse donnée

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

La même question a été résolue par M. l'abbé Bretaudeau, professeur au collège de Baupréau (Maine-et-Loire); et par MM. Lez; Launoy, professeur au lycée de Puy; Goffart; Moret-Blanc; Ernest Barisien; Dupin, lycée de Bar-le-Duc; Farisano Giovanni, élève ingénieur à l'Université de Naples; F. Pisani.

Question 1307

(voir 2e série, t. III, p. 448).

Par M. Moret-Blanc.

PQ *est un diamètre d'une hyperbole équilatère; un cercle décrit du point* P *comme centre avec* PQ *pour rayon rencontre l'hyperbole en trois autres points* L, M, N : *démontrer que le triangle* LMN *est équilatéral.*

(Extrait du Journal anglais *The educational Times.*)

Soient

(1) $$xy = k^2$$

l'équation de l'hyperbole équilatère; x_0, y_0 les coordonnées du point P, celles du point Q étant $-x_0$, $-y_0$;

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 4(x_0^2 + y_0^2)$$

ou

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - 2x_0 x - 2y_0 y - 3(x_0^2 + y_0^2) = 0$$

sera l'équation du cercle décrit du point P avec le rayon PQ.

Éliminant y entre cette équation et celle de l'hyperbole, on a, pour déterminer les abscisses des points d'intersection des deux courbes, l'équation

$$x^4 - 2x_0 x^3 - 3(x_0^2 + y_0^2)x^2 - 2k^2 y_0 x + k^4 = 0.$$

Cette équation devant être vérifiée par l'abscisse $-x_0$ du point Q, son premier membre est divisible par $x + x_0$; effectuant la division, il vient

$$x^3 - 3x_0 x^2 - 3y_0^2 x + y_0^2 x_0 = 0,$$

équation qui donne les abscisses des points L, M, N. On aura l'équation qui donne leurs ordonnées en permutant les x et les y, d'où

$$y^3 - 3y_0 y^2 - 3x_0^2 y + x_0^2 y_0 = 0.$$

La moyenne des abscisses, ou l'abscisse du centre de gravité du triangle LMN, est x_0, son ordonnée est y_0; le point P est, à la fois, le centre de gravité du triangle LMN et le centre du cercle circonscrit au triangle; donc les médianes se confondent avec les hauteurs, et le triangle est équilatéral.

La même question a été résolue par MM. Barisien; Goffart; Juhel Renoy; Pisani; Launoy, professeur au lycée de Puy; Bretaudeau; Lez; Caronnet (Th.), élève de Mathématiques spéciales au collège Chaptal; et par un Anonyme.

Question 1312

(voir 3e série, t. III, p. 432),

PAR M. J. RICHARD,

Élève à l'École Normale supérieure.

Trouver l'enveloppe d'une parabole dont le foyer F *et un point,* P, *de la directrice sont fixes.* (D'OCAGNE.)

On sait que la directrice est le lieu des symétriques du foyer par rapport aux tangentes. Donc, si l'on joint le point fixe P de la directrice au foyer, et si, au milieu de la droite PF, on élève une perpendiculaire, cette perpendiculaire sera constamment tangente à la parabole variable; c'est donc l'enveloppe cherchée.

La Géométrie analytique conduit au même résultat.

Prenons le point F pour origine, et FP pour axe des x. Soit FP $= a$.

L'équation générale des paraboles, dont F est le foyer et P un point de la directrice, peut s'écrire

$$(1) \qquad (x-a)\cos\varphi + y\sin\varphi = \pm\sqrt{x^2+y^2}.$$

En égalant les dérivées des deux membres, par rapport à φ, on a

$$(2) \qquad -(x-a)\sin\varphi + y\cos\varphi = 0.$$

Pour avoir l'équation de l'enveloppe, il faut éliminer φ entre les équations (1) et (2), ce qui se fait en les élevant au carré et ajoutant; on obtient alors

$$(x-a)^2 + y^2 = x^2 + y^2, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{a}{2}.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Goffart, Moret-Blanc, Lez; Genetx-Martin; Louis M.; Ernest Barisien; Juhel Renoy; Bretaudeau; Dupin, lycée de Bar-le-Duc; Mirman, élève en spéciales, au lycée Saint-Louis; Auguste Dallot, Caronnet (Th.), élève en Mathématiques spéciales au collège Chaptal et par un Anonyme.

Question 1314

(voir e série, t. III, p. 496).

PAR M. LEZ.

Par les sommets d'un triangle ABC, *on mène aux côtés opposés des droites* AD, BE, CF *se coupant en un même point* O; *on a*

$$\frac{AO}{AD}+\frac{BO}{BE}+\frac{CO}{CF}=2.$$

De même, si, par les sommets d'un tétraèdre ABCD *on mène aux faces opposées des droites* AE, BF, CG, DH *se coupant en un même point* O, *on a*

$$\frac{AO}{AE}+\frac{BO}{BF}+\frac{CO}{CG}+\frac{DO}{DH}=3.$$

(GENTY.)

Le triangle ABC se décompose en trois triangles ayant un sommet commun au point O, et pour bases les côtés du triangle.

Or les triangles ABC, BOC ayant même base BC sont entre eux comme leurs hauteurs, ou dans le même rapport que les segments AD, OD, c'est-à-dire que

$$\frac{ABC}{BOC}=\frac{AD}{OD}.$$

On peut donc écrire

$$\frac{ABC-BOC}{ABC}=\frac{AD-OD}{AD}=\frac{AO}{AD}.$$

De même,

$$\frac{ABC-AOC}{ABC}=\frac{BO}{BE},$$

$$\frac{ABC-AOB}{ABC}=\frac{CO}{CF}.$$

Additionnant, on a

$$\frac{3ABC-ABC}{ABC}=2=\frac{AO}{AD}+\frac{BO}{BE}+\frac{CO}{CF}.$$

Par analogie, le tétraèdre ABCD se décompose en quatre tétraèdres ayant pour sommet commun le point O, et pour bases chacune de ses faces.

Or les tétraèdres ABCD, OBCD ayant même base BCD sont entre eux comme leurs hauteurs, ou dans le même rapport que les segments AE, OE, c'est-à-dire que

$$\frac{ABCD}{OBCD} = \frac{AE}{OE}.$$

On peut donc écrire

$$\frac{ABCD - OBCD}{ABCD} = \frac{AE - OE}{AE} = \frac{AO}{AE}.$$

De même

$$\frac{ABCD - OACD}{ABCD} = \frac{BO}{BF},$$

$$\frac{ABCD - OABD}{ABCD} = \frac{CO}{CG},$$

$$\frac{ABCD - OABC}{ABCD} = \frac{DO}{DH}.$$

Additionnant, on a

$$\frac{4\,ABCD - (OBCD + OACD + OADB + OABC)}{ABCD}$$

$$= 3 = \frac{AO}{AE} + \frac{BO}{BF} + \frac{CO}{CG} + \frac{DO}{DH}.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Goffart, Moret-Blanc, Geneix-Martin, Mirman, Richard Pisani, Collier, élève en seconde au Prytanée militaire, et par un Anonyme.

Question 1520

(voir 2e série, t. IX, p. [illegible]);

PAR M. E. BARISIEN.

Si du point O *on voit le côté* BC *du triangle* ABC *sous un angle égal à* A *augmenté de* 90°, *on a entre les côtés* a, b, c *du triangle et les distances* α, β, γ *du* *point* O *aux sommets* A, B, C *la relation*

$$a^2\alpha^2 \quad b\,\beta \quad c^2 \quad {}^2 \; (^1)$$

(D'OCAGNE.)

Les triangles ABC et OBC (²) donnent les égalités

(1) $\qquad a \quad b \quad c \quad 2bc\cos A$

(2) $\qquad a^2 \quad \beta \quad\quad 2\beta \;\sin A$

qui permettent de déterminer cos A et sin A rationnellement en fonction de a, b, c et de α, β, γ.

En désignant par x l'angle OBC, on pourra aussi déterminer rationnellement $\sin x$ et $\cos x$. En effet, on a

$$a \quad \beta \quad 2a\beta\ldots x \quad \text{et} \quad \frac{\sin x}{\ldots} = \frac{\cos A}{a},$$

donc

(3) $\qquad \cos x \quad \dfrac{\gamma^2 \quad \beta}{2a\beta} \quad - \qquad$ et $\qquad \sin x \quad \dfrac{\ldots A}{a} \quad \dfrac{b \quad c \quad \ldots}{2abc}$

Or, dans le triangle AOB,

$$\alpha \quad \beta \quad c \; - 2\beta c\cos(B \quad x)$$

ou

$$\alpha \quad \beta \quad c \quad 2\beta c(\cos B\cos x \quad \sin B\sin x).$$

Mais

(4) $\qquad \ldots B \quad \dfrac{c \quad\quad b}{2ac}$

et

(5) $\qquad \sin B = \dfrac{b\sin A}{a} \quad \dfrac{b(a \quad \beta}{2a\beta\gamma} \ldots)$

en tenant compte de l'égalité (2)

(¹) En supposant toutefois que le point O et le sommet A soient situés d'un même côté de la droite BC sur le plan du triangle, car autrement la proposition énoncée ne serait pas exacte. (G.)

(²) Le lecteur est prié de faire la figure.

En remplaçant dans l'expression de α^2, $\sin B$, $\cos B$, $\sin x$, $\cos x$ par les valeurs (3), (4) et (5), il vient

$$\alpha^2 = \beta^2 + c^2 - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + \beta^2 - \gamma^2)}{2a^2} - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 - \beta^2 + \gamma^2)}{2a^2}.$$

Cette expression développée et réduite devient

$$a^2\alpha^2 = b^2\beta^2 + c^2\gamma^2. \tag{6}$$

Remarque. — En éliminant A entre les équations (1) et (2), on a la relation

$$\frac{(\beta^2 + \gamma^2 - a^2)^2}{4\beta^2\gamma^2} + \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} = 1. \tag{7}$$

On sait, en effet, qu'il existe une relation entre les distances mutuelles de quatre points O, A, B, C. Dans le cas particulier qui nous occupe, cette relation se dédouble en les deux égalités (6) et (7).

La même question a été résolue par MM. Goffart; Laisant; et Gaetano de Marco, élève de l'Université de Naples.

Note. — Sur le plan du triangle ABC, le lieu géométrique d'un point O, défini par la relation

$$a^2\alpha^2 = b^2\beta^2 + c^2\gamma^2,$$

est une circonférence que l'équation

$$x^2 + y^2 - ax + a \operatorname{tang} A . y = 0$$

représente, en prenant pour origine des coordonnées rectangulaires le sommet B du triangle, et dirigeant l'axe des abscisses suivant la droite BC.

Les points B et C appartiennent évidemment à cette circonférence; le côté BC partage le cercle en deux segments : l'un d'eux situé, par rapport à BC, du même côté que le sommet A, est capable d'un angle de $90^\circ + A$; l'autre segment est capable d'un angle de $90^\circ - A$. (G.)

Question 1521

(voir 3ᵉ série, t. IV, p.)

PAR M. LEBOULLEUX,

Professeur de Mathématiques à Genève.

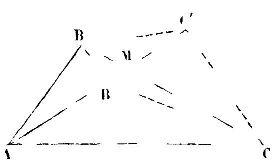
Le point M *étant pris d'une manière quelconque sur le côté* BC *du triangle* ABC, *on projette orthogonalement en* B′, C′ (*fig.* 1) *les sommets* B, C, *sur* AM : *démontrer qu'on a la relation*

$$BC.AM = MB.AC' + MC.AB'.$$

(D'OCAGNE.)

Je remarque d'abord que la similitude des triangles

Fig. 1



rectangles BB′M, CC′M (*fig.* 1), donne

$$MC.MB' = MB.MC'\,;$$

on a d'ailleurs

$$\begin{aligned}BC.AM &= (MB + MC)(AB' - MB') \\ &= MB(AB' - MB') + MC.AB' - MC.MB',\end{aligned}$$

ou, parce que

$$MC.MB' = MB.MC',$$

on a

$$\begin{aligned}BC.AM &= MB(AB' - MB' + MC') + MC.AB' \\ &= MB.AC' - MC.AB',\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer (¹).

(¹) En désignant par ABC, ABC′, ACB′ les surfaces des triangles ABC, ABC′, ACB′, l'égalité proposée BC.AM = MB.AC′ + MC.AB′ revient à celle-ci ABC = ABC′ + ACB′, parce que les produits

Note. — La même question a été résolue par MM. Pisani; Goffart; Laisant; Genety-Martin; Lez; Moret-Blanc; Barisien; Gaetano de Marco, élève de l'Université de Naples; Puech, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Rennes.

BC.AM, MB.AC', MC.AB' sont proportionnels aux surfaces des triangles ABC, ABC', ACB'.

Or, on a évidemment (*fig.* 1)

$$ABC = ABC' + ACB' + MCB' - MBC',$$

mais l'égalité

$$MC.MB' = MB.MC'$$

donne

$$MCB' = MBC',$$

donc

$$ABC = ABC' + ACB',$$

ce qu'il fallait démontrer.

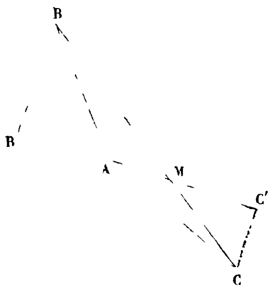
Pour généraliser la formule proposée

$$BC.AM = MB.AC' + MC.AB',$$

il faut, comme dans toutes les propositions de ce genre, avoir égard aux signes des segments AB', AC', leur donner le même signe, ou des signes différents, suivant qu'ils sont dirigés dans le même sens, ou en sens contraire, à partir du point A, sur la droite AM, indéfiniment prolongée.

Si l'on considère comme positifs les segments dirigés dans le sens

Fig. 2.



AM, il faudra prendre négativement un segment dirigé dans le sens contraire.

Lorsque, par exemple, l'angle MAB est obtus (*fig.* 2), le segment AB' est négatif, et, en valeurs absolues, on a

$$BC.AM = MB.AC' - MC.AB',$$

comme il est facile de s'en assurer. (G.)