Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 374-378

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__374_1>

CORRESPONDANCE.

I. — *Extrait d'une Lettre de M. d'Ocagne.*

Voulez-vous me permettre d'ajouter quelques mots aux remarques très intéressantes qui ont été faites par mon ami M. Cesaro au sujet des coordonnées axiales (*Nouvelles Annales*, même tome, p. 256)?

Mes recherches sur les *Transformations axiales*, auxquelles M. Cesaro fait allusion dans la Note qui termine son article, sont résumées dans la Note III de ma brochure *Coordonnées parallèles et axiales*, qui vient de paraître à la Librairie Gauthier-Villars, et dont la majeure partie, grâce à votre obligeance, a vu le jour dans les *Nouvelles Annales* (1).

Dans cette Note (p. 87), je fais remarquer que l'identité de l'*inversion axiale* avec la *transformation par semi-droites réciproques* résulte du théorème que j'ai démontré pour cette dernière transformation dans les *Nouvelles Annales* (3e série, t. II, p. 249).

A la liste des géomètres qui se sont occupés des

(1) Les parties inédites de la brochure sont le *Procédé nouveau de calcul graphique déduit de la consideration des coordonnees parallèles* (p. 73 à 81), et diverses Notes (p. 82 à 91), dont la Note *Sur les transformations axiales*.

coordonnées axiales, il convient d'ajouter le nom de M. Casey, professeur à l'Université catholique de Dublin, dont les belles recherches font l'objet d'un Mémoire étendu publié dans les *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* (vol. CLXVII, p. 367).

La courbe que j'ai étudiée au n° 30 de mon Mémoire (*Développante d'hypocycloïde*, d'après MM. Brocard et Cesaro) a déjà été rencontrée par un assez grand nombre de géomètres à l'occasion de recherches diverses; c'est M. Brocard qui nous l'a fait savoir dans une Note intéressante (*Nouvelles Annales*, même tome, p. 144). Aux mathématiciens cités en cet endroit, il faut joindre M. Collignon qui a eu aussi l'occasion de considérer cette courbe (*Association française, Congrès d'Alger*, p. 219).

Nous terminerons par la remarque suivante : *l'équation axiale* de la tractrice (*Nouvelles Annales*, 3e série, t. III, p. 553) conduit immédiatement à une curieuse propriété de cette courbe qui a été signalée par M. Collignon [1] :

Si, par le point où chaque tangente t à une tractrice coupe l'asymptote δ de cette courbe, on élève une perpendiculaire p à δ et que l'on inscrive à côté de p la valeur de l'angle que p fait avec t, on obtient une projection de Mercator dans laquelle les droites p représentent les parallèles, l'angle inscrit à côté de chacune de ces droites faisant connaître la latitude correspondante.

La simple comparaison de l'équation axiale de la

---

[1] Mémoire intitulé : *Mesure des lignes sur la sphère terrestre*, dans le *Bulletin de l'Association française* (Congrès de Blois).

tractrice avec l'équation fondamentale bien connue de la projection de Mercator conduit à ce résultat.

Les remarques faites par M. Cesaro au sujet des racines imaginaires des équations dans le numéro de juillet (p. 329) se ramènent immédiatement au curieux théorème que voici :

Si les affixes des racines d'une équation algébrique figurent des centres d'attraction, de même masse, attirant un point mobile en raison inverse de la distance, les positions d'équilibre de ce point mobile coïncident avec les affixes des racines de l'équation dérivée.

Ce théorème, dû à M. Félix Lucas, a été communiqué par son auteur à l'Académie des Sciences dans la séance du 28 juillet 1879. M. Félix Lucas en a déduit diverses conséquences importantes pour la théorie des racines imaginaires.

II. — *Lettre de M. Réalis.*

Les propositions que vous m'avez fait l'honneur d'insérer aux *Nouvelles Annales* (p. 370, 1883), et dont on n'a pas encore envoyé de démonstration, me font penser qu'il ne serait peut-être pas inopportun de les faire suivre de quelques autres énoncés analogues, et fondés de même sur des considérations arithmologiques.

Je me borne en ce moment à la *Question* ci-jointe, faisant partie d'une série de questions du même genre, que j'ai rédigées, et que je m'empresserai de vous transmettre, si vous croyez que cela puisse intéresser vos lecteurs.

Question.

α, β, γ étant des nombres entiers, et β étant premier avec 5, aucune des équations

$$x^4 - \alpha x^3 + (4\alpha^2 \cdots \beta^2)x^2 - 2\alpha\beta^2 x + \beta(2\gamma \cdots 4\beta^3) = 0,$$
$$x^4 - \alpha x^3 \cdots (4\alpha \cdots 4\beta^2)x^2 \cdots 3\alpha\beta^2 x \cdots \beta(5\gamma^3 \cdots 4\beta^3) \cdots 0$$

(où les signes se correspondent) ne peut avoir une racine entière.

De même pour les équations

$$x^4 - \alpha x^3 \cdots (4\alpha \cdots 2\beta^2)x^2 \cdots \alpha\beta^2 x \cdots A \cdots 0$$
$$x^4 \cdots \alpha x^3 \cdots (4\alpha \cdots 2\beta^2)x^2 - 2\alpha\beta^2 x \cdots A \cdots 0$$
$$x^4 - \alpha x^3 \cdots (4\alpha + 2\beta^2)x^2 \cdots 2\alpha\beta^2 x \cdots A \cdots 0$$
$$x^4 \cdots \alpha x^3 \cdots (4\alpha \cdots 3\beta^2)x^2 - 4\alpha\beta^2 x \cdots A \cdots 0$$

$$x^4 \cdots \alpha x^3 - 4\alpha^2 x \cdots - \alpha\beta^2 x \cdots B \cdots 0$$
$$x^4 \cdots \alpha x^3 \cdots 4\alpha^2 x \cdots 4\alpha\beta^2 x \cdots B \cdots 0$$
$$x^4 - \alpha x^3 \cdots (4\alpha - \beta^2)x^2 - \alpha\beta^2 x \cdots B = 0$$
$$x^4 - \alpha x^3 \cdots (4\alpha - 4\beta^2)x^2 - 4\alpha\beta^2 x + B = 0$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$A \cdots \beta(5\gamma \cdots 4\beta^3), \qquad B = \beta(2\gamma \cdots - 4\beta^3).$$

Solution de la question proposée.

Ni l'une, ni l'autre des formes $u^2 + 2v^2$, $u^2 + 3v^2$, dans lesquelles u et v sont premiers entre eux, ne peut représenter un nombre divisible par 5.

(EULER, LAGRANGE.)

La proposition subsiste évidemment si l'un des nom-

bres u, v est premier avec 5, lors même qu'ils auraient des facteurs communs.

Cela étant, les relations

$$\begin{aligned}
&(x^2 - 2\alpha x - 2\beta^2)^2 \quad 2(\beta x)^2 \\
&\quad = 5(\alpha x^3 \quad \beta^2 x^2 - 2\alpha\beta^2 x - \beta\gamma^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(x^2 + 2\alpha x - 2\beta^2)^2 \quad 2\beta^4 \\
&\quad = 5(\alpha x^3 \quad \beta^2 x^2 \quad 2\alpha\beta^2 x - \beta\gamma^3 - 2\beta^4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(x^2 - 2\alpha x \quad 2\beta^2)^2 - 2(2\beta x)^2 \\
&\quad = 5(\alpha x^3 - \alpha\beta^2 x \quad - \beta\gamma^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(x^2 - 2\alpha x \quad 2\beta^2)^2 - \quad 2\beta^4 \\
&\quad - 5(\alpha x^3 - \alpha\beta^2 x \quad - \beta\gamma^3 + 2\beta^4);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(x^2 - 2\alpha x \quad \beta^2)^2 \quad 3\beta^4 \\
&\quad 5(\alpha x^3 \quad \alpha\beta^2 x \quad - \beta\gamma^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(x^2 - 2\alpha x \quad 2\beta^2)^2 + 2(2\beta x)^2 \\
&\quad 5(\alpha x^3 \quad 2\beta^2 x^2 - 2\alpha\beta^2 x - \beta\gamma^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(x^2 \quad 2\alpha x \quad 2\beta^2)^2 - \quad 2(\beta x)^2 \\
&\quad 5(\alpha x^3 \quad \beta^2 x^2 - 2\beta^2 x - \beta\gamma^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(x^2 + 2\alpha x \quad - \beta^2)^2 - 3\beta^4 \\
&\quad - 5(\alpha x^3 - \beta^2 x^2 - \beta\gamma^3);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(x^2 \quad 2\alpha x \quad \beta^2)^2 + 2(2\beta x)^2 \\
&\quad 5(\alpha x^3 \quad 2\beta^2 x^2 - \alpha\beta^2 x - \beta\gamma^3 + \beta^4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(x^2 \quad 2\alpha x \quad \beta^2)^2 + 2(\beta x)^2 \\
&\quad 5(\alpha x^3 - \beta\gamma^3 - \beta^4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(x^2 - 2\alpha x \quad \beta^2)^2 + 2(\beta x)^2 \\
&\quad - 5(\alpha x^3 - \beta^2 x^2 \quad - \alpha\beta^2 x - \beta\gamma \quad + \beta^4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(x^2 + 2\alpha x - \beta^2)^2 - 2(2\beta x)^2 \\
&\quad = 5(\alpha x^3 - 2\beta^2 x^2 - \beta\gamma^3 - \beta^4),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire les équations proposées sont impossibles en nombres entiers, si β (et par conséquent x) est premier avec 5.