NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE D'OCAGNE

Note sur la symédiane

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 360-367

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__360_0>

NOTE SUR LA SYMÉDIANE (¹);

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

1. Je ferai, dans ce qui suit, usage de deux définitions proposées par M. Neuberg

1° Étant donné un point dans le plan d'un triangle, on joint ce point aux trois sommets du triangle et l'on prend les symétriques des droites ainsi menées par rapport aux bissectrices correspondantes des angles du triangle. Les trois droites ainsi construites concourent en un même point qui est dit *transformé isogonal* du premier par rapport au triangle considéré.

Il est bien évident que ce genre de corrélation entre deux points est réciproque.

Ainsi, l'orthocentre (point de rencontre des hauteurs) et le centre du cercle circonscrit sont *conjugués isogonaux*; de même, le centre de gravité et le centre des symédianes, ou point de Lemoine.

Par conséquent, toute propriété générale de la transformation isogonale conduira à une propriété du centre des symédianes.

Exemples :

Si une conique est inscrite dans un triangle, ses foyers sont conjugués isogonaux par rapport à ce triangle.

La propriété qui résulte de là pour le centre des symédianes a été signalée par M. E. Lemoine (²).

(¹) Voir *Nouvelles Annales*, 3e série, t. II, p. 450, et t. III, p. 25.
(²) Voir notre deuxième Note, p. 27.

Les pieds des perpendiculaires abaissées de deux points, conjugués isogonaux par rapport à un triangle, sur les côtés de ce triangle, sont sur un cercle qui a pour centre le milieu de la distance qui sépare ces deux points.

La précédente propriété a donc lieu d'une part pour le centre de gravité et le centre des symédianes, de l'autre, pour l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit; dans ce second cas, le cercle n'est autre que le cercle des neuf points.

Le centre du cercle inscrit est son propre conjugué isogonal. Tout point du cercle circonscrit a son conjugué isogonal à l'infini, d'où résulte qu'*une conique inscrite dans un triangle et ayant un foyer sur le cercle circonscrit à ce triangle ne peut être qu'une parabole.*

La méthode fort élégante par laquelle M. Astor [1] a déduit les propriétés des courbes unicursales du quatrième ordre de celles des coniques est une transformation isogonale.

2. Voici maintenant la seconde définition de M. Neuberg :

2° Étant donné un point dans le plan d'un triangle, on joint ce point aux trois sommets du triangle; les droites ainsi menées déterminent sur les côtés du triangle trois points dont on prend les symétriques par rapport aux milieux des côtés correspondants; on joint enfin ces trois nouveaux points aux sommets opposés; les trois droites ainsi obtenues concourent en un même point qui est dit *transformé isotomique* du premier par rapport au triangle considéré.

---

[1] *Nouvelles Annales,* 3e série, t. III, p. 181.

Comme le précédent, ce genre de corrélation est réciproque.

Le centre du cercle inscrit a pour conjugué isotomique le point que nous avons appelé ailleurs le centre des *anti-bissectrices* ([1]). Le centre de gravité est son propre conjugué isotomique.

Grâce à cette définition, nous pourrons énoncer très simplement le théorème suivant, qui vient de nous être communiqué ([2]) par M. R. Tucker, de Londres :

Le conjugué isotomique de l'orthocentre d'un triangle est le centre des symédianes du triangle formé par les parallèles aux côtés de ce triangle, menées respectivement par ses trois sommets.

M. Tucker a en outre remarqué que, si l'on considère une série de triangles inscrits les uns dans les autres et tels que les sommets de chacun d'eux soient les milieux des côtés de celui qui le précède, c'est-à-dire tels que le centre des symédianes de chacun d'eux dérive de l'orthocentre de celui qui lui est inscrit, ainsi qu'il a été dit dans le théorème précédent, *les centres des symédianes de tous ces triangles sont en ligne droite.*

D'ailleurs la limite de ces triangles est un point qui est leur centre de gravité commun; donc, *l'axe qui contient les centres des symédianes de tous ces triangles passe par leur centre de gravité commun.*

Nous pourrons encore énoncer ainsi ce résultat :

Le centre de gravité, le centre des symédianes et le conjugué isotomique de l'orthocentre d'un triangle sont en ligne droite.

([1]) *Journal de Mathématiques élémentaires*, t. IV, p. 158.

([2]) La rédaction de cette Note remonte au mois de mai 1884.

3. Soit K un point donné dans le plan d'un triangle ABC. Menons par le point K une droite $A'B'C'$ coupant le côté BC au point A', le côté AC au point B' et le côté AB au point C'. Il existe sur la droite ainsi menée deux points M et M_1, centres des moyennes harmoniques du second ordre des points A', B', C', par rapport à l'origine K.

On sait que, lorsqu'on fait pivoter la droite $A'B'C'$ autour du point K, les points M et M_1 se déplacent sur une conique circonscrite au triangle ABC, et qui est dite *polaire conique* du point K, par rapport au triangle ABC.

On sait en outre qu'en chaque sommet la tangente à cette conique est conjuguée harmonique de la droite qui joint ce sommet au point K, par rapport aux côtés adjacents.

Dès lors, si le point K se confond avec le centre des symédianes, on voit, d'après un théorème énoncé dans notre deuxième Note sur la symédiane, que les tangentes à la polaire conique du point K aux points A, B, C se confondent avec les tangentes au cercle circonscrit. Cette polaire conique, ayant en commun avec ce cercle trois points et les tangentes en ces points, se confond avec lui; par suite :

La polaire conique du point de Lemoine d'un triangle par rapport à ce triangle est le cercle circonscrit au triangle.

Or, d'après une propriété bien connue, si le point M est centre des moyennes harmoniques du second ordre des points A', B', C', par rapport à l'origine K, ce point K est centre des moyennes harmoniques du premier ordre des points A', B', C', par rapport à l'origine M.

De là ce théorème :

Si l'on prend sur le cercle circonscrit à un triangle ABC *un point* M *quelconque, et si l'on joint ce point* M *au point de Lemoine* K *du triangle* ABC, *la droite* MK *coupant les côtés du triangle aux points* A', B', C', *le point* K *est le centre des moyennes harmoniques des points* A', B', C' *par rapport à l'origine* M.

C'est-à-dire que l'on a, en tenant compte des signes,

$$\frac{3}{MK} = \frac{1}{MA'} + \frac{1}{MB'} + \frac{1}{MC'}.$$

4. Nous rappellerons maintenant un théorème que nous avons démontré dans les *Nouvelles Annales* (3e série, t. II, p. 256) et qui s'énonce ainsi :

Une corde AB *d'une courbe quelconque est vue d'un point fixe* O *sous un angle constant. Si la corde* AB *touche son enveloppe au point* E, *et si les tangentes à la courbe aux points* A *et* B *se coupent en* T, *les droites* OT *et* OE *sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle* AOB.

Si la courbe considérée est une conique et si le point O est son centre, la droite OT passe par le milieu de AB; par suite la droite OE est symédiane du triangle AOB, et l'on a ce théorème :

Si une corde AB *d'une conique est vue du centre* O *de cette conique sous un angle constant, on a le point* E *où cette corde touche son enveloppe, en prenant la symédiane* OE *du triangle* AOB.

Lorsque l'angle AOB est droit, la symédiane OE est perpendiculaire sur AB. Dès lors, toutes les normales à l'enveloppe de AB passant par le point O, cette enveloppe est un cercle de centre O. On retrouve ainsi un théorème bien connu.

5. Prenons une conique rapportée à ses deux diamètres conjugués égaux (Ox et Oy),

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

La polaire d'un point P (α, β), par rapport à cette conique, a pour équation

$$\alpha x + \beta y = a^2.$$

Cette droite coupant Ox en A, Oy en B, on a

$$OA = \frac{a^2}{\alpha}, \quad OB = \frac{a^2}{\beta}.$$

Si PH et PK sont les distances respectives du point P à Ox et à Oy, on a, θ étant l'angle des axes,

$$PH = \beta \sin\theta, \quad PK = \alpha \sin\theta;$$

par suite,

$$\frac{PH}{PK} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{OA}{OB},$$

ce qui montre [1] que la droite OP est symédiane du triangle OAB. Donc :

La droite qui joint un point quelconque au centre d'une conique est symédiane du triangle formé par la polaire de ce point, relativement à cette conique, avec les deux diamètres conjugués égaux de la conique.

6. Si les points A et B ont respectivement pour inverses par rapport au point O les points A′ et B′, les droites AB et A′B′ sont antiparallèles, par rapport à l'angle AOB; par suite, la médiane du triangle OAB, issue de O, se confond avec la symédiane du triangle OA′B′ et *vice versa*.

---

[1] Voir *Nouvelles Annales*, 3e série, t. II, p. 451, théorème II.

Cette remarque permet d'obtenir, par la méthode d'inversion, des propriétés de la symédiane.

Par exemple, l'exercice IV (3ᵉ série, t. II, p. 463) de notre première Note sur la symédiane conduit à la propriété suivante :

Les cercles décrits sur AB *et sur* AC *comme cordes, et ayant respectivement en* B *et en* C *des tangentes parallèles à la symédiane du triangle* ABC, *issue de* A, *se coupent sur la médiane issue du même sommet.*

Autre exemple :

Prenons sur les côtés AB et AC d'un triangle les points B′ et C′ inverses respectivement de B et de C, par rapport à A. La symédiane du triangle ABC, issue de A, passe, d'après ce qui vient d'être dit, par le milieu M′ de B′C′. Par B′ menons une parallèle à AC, par C′ une parallèle à AB; ces droites se coupent en D′ sur AM′ et l'on a

$$AD' = 2\,AM'.$$

L'inverse de la droite B′D′ est le cercle qui passe par A et B et qui est tangent en A à AC; l'inverse de C′D′ est le cercle qui passe par A et C et qui est tangent en A à AB. Ces deux cercles se coupent en D, point inverse de D′, par rapport à A; ce point se trouve, par suite, sur la droite AM′D′ symédiane de ABC. Soit M le point (inverse de M′) où cette droite coupe le cercle circonscrit à ABC. Puisque $AD' = 2\,AM'$, il en résulte que $AD = \frac{AM}{2}$.

De là ces théorèmes :

1° *Le cercle passant par les sommets* A *et* B *et tangent en* A *au côté* AC, *et le cercle passant par les sommets* A *et* C *et tangent en* A *au côté* AB, *se coupent en* D *sur la symédiane issue de* A.

2° *Si cette symediane coupe en* M *le cercle circonscrit au triangle* ABC, *le point* D *est le milieu de* AM.

On sait, d'ailleurs, que le point M est le centre harmonique des points B et C relativement au point A, et que les tangentes au cercle circonscrit à ABC en A et en M se coupent sur BC.

On voit, par les exemples précédents, les services que peut rendre la méthode d'inversion pour trouver de nouvelles propriétés de la symédiane.

7. Nous énoncerons enfin le théorème suivant facile à démontrer :

Prenant sur le côté BC *les points* H *et* I *tels que* AH *soit parallèle à la tangente en* B *au cercle circonscrit à* ABC, *et que* AI *soit parallèle à la tangente en* C *à ce cercle, si par le point* H *on tire une parallèle à* AB, *et par le point* I *une parallèle à* AC, *les droites ainsi menées se coupent sur la symédiane issue de* A.