NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

F. GOMES TEIXEIRA

Sur l'interpolation au moyen des fonctions circulaires

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 351-359

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__351_0>

SUR L'INTERPOLATION AU MOYEN DES FONCTIONS CIRCULAIRES;

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA,
Professeur à l'Université de Coimbra.

I.

Le problème de la détermination de la fonction $f(x)$ qui reçoit les valeurs $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$, quand on donne à la variable x les valeurs $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, est indéterminé. On y peut satisfaire au moyen d'une fonction entière, homogène de $\sin x$ et $\cos x$, et nous avons alors la formule (*Cours d'Analyse* de M. Hermite)

$$\begin{aligned} f(\sin x, \cos x) = {} & \frac{\sin(x-a_2)\sin(x-a_3)\ldots\sin(x-a_n)}{\sin(a_1-a_2)\sin(a_1-a_3)\ldots\sin(a_1-a_n)} y_1 \\ & + \frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_3)\ldots\sin(x-a_n)}{\sin(a_2-a_1)\sin(a_2-a_3)\ldots\sin(a_2-a_n)} y_2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_{n-1})}{\sin(a_n-a_1)\sin(a_n-a_2)\ldots\sin(a_n-a_{n-1})} y_n. \end{aligned}$$

Inversement, $f(\sin x, \cos x)$ étant une fonction entière, homogène du degré $n-1$, nous avons une formule de décomposition d'une fraction en des fractions simples, à savoir

$$\begin{aligned} & \frac{f(\sin x, \cos x)}{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_n)} \\ & = \frac{f(\sin a_1, \cos a_1)}{\sin(a_1-a_2)\sin(a_1-a_3)\ldots\sin(a_1-a_n)} \frac{1}{\sin(x-a_1)} \\ & + \frac{f(\sin a_2, \cos a_2)}{\sin(a_2-a_1)\sin(a_2-a_3)\ldots\sin(a_2-a_n)} \frac{1}{\sin(x-a_2)} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Nous allons considérer, dans cette Note, le cas où quelques-unes des quantités $a_1, a_2, \ldots$ sont égales, pour chercher la formule de décomposition et la formule correspondante d'interpolation.

II.

En supposant premièrement $a_1 = a_2$ et en déterminant la somme des deux premiers termes de la formule précédente par le chemin qu'on a l'habitude de suivre dans les questions de cette nature, c'est-à-dire en posant $a_2 = a_1 + \omega$, on a le résultat

$$\begin{aligned} y = &- \frac{\sin(x - a_1 - \omega)\sin(x - a_3)\ldots\sin(x - a_n)}{\sin\omega}\mathrm{F}(a_1) \\ &+ \frac{\sin(x - a_1)\sin(x - a_3)\ldots\sin(x - a_n)}{\sin\omega}[\mathrm{F}(a_1) + \omega\,\mathrm{F}'(a_1) + \ldots] \\ &+ \frac{\sin(x - a_1)\sin(x - a_1 - \omega)\ldots\sin(x - a_n)}{\sin(a_3 - a_1)\sin(a_3 - a_1 - \omega)\ldots\sin(a_3 - a_n)}y_3 + \ldots, \end{aligned}$$

où

$$\mathrm{F}(a_1) = \frac{f(a_1)}{\sin(a_1 - a_3)\sin(a_1 - a_4)\ldots}$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{F}(a_2) = \frac{f(a_2)}{\sin(a_2 - a_3)\sin(a_2 - a_4)\ldots},$$

et où l'on représente $f(\sin x, \cos x)$ par $f(x)$.

Cette formule donne, en la développant suivant les puissances de ω et en y posant ensuite $\omega = 0$,

$$\begin{aligned} y = &\cos(x - a_1)\sin(x - a_3)\ldots\sin(x - a_n)\,\mathrm{F}(a_1) \\ &+ \sin(x - a_1)\sin(x - a_3)\ldots\sin(x - a_n)\,\mathrm{F}'(a_1) \\ &+ \frac{\sin^2(x - a_1)\sin(x - a_4)\ldots\sin(x - a_n)}{\sin^2(a_3 - a_1)\sin(a_3 - a_4)\ldots\sin(a_3 - a_n)}f(a_3) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Cette formule détermine la fonction $f(x)$, étant données les quantités $f(a_1)$, $f'(a_1)$, $f(a_2)$, $f(a_3)$, ...

Cela posé, nous allons considérer le cas général. Soit

$$f(x) = \sum_{k=1}^{k=i} \frac{\left[\begin{array}{c}\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_i)\\ \times\sin(x-a_{i+1})\ldots\sin(x-a_n)\end{array}\right]}{\left[\begin{array}{c}\sin(a_k-a_1)\sin(a_k-a_2)\ldots\sin(a_k-a_i)\\ \times\sin(a_k-a_{i+1})\ldots\sin(a_k-a_n)\end{array}\right]} F(a_k)$$

$$+\sum_{k=i+1}^{k=n} \frac{\left[\begin{array}{c}\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_i)\ldots\\ \times\sin(x-a_n)\end{array}\right]}{\left[\begin{array}{c}\sin(a_k-a_1)\sin(a_k-a_2)\ldots\sin(a_k-a_i)\ldots\\ \times\sin(a_k-a_n)\end{array}\right]} f(a_k),$$

en posant

$$F(a_k) = \frac{f(a_k)}{\sin(a_k-a_{i+1})\sin(a_k-a_{i+2})\ldots}.$$

Si l'on fait maintenant

$$a_2 = a_1+\omega,\quad a_3 = a_1+2\omega,\quad \ldots,$$
$$a_k = a_1+(k-1)\omega,\quad \ldots,\quad a_i = a_1+(i-1)\omega,$$

la première ligne de $f(x)$, que nous appellerons P, prend la forme

$$P = \sum_{k=1}^{k=i}(-1)^{i-k} \frac{\left[\begin{array}{c}\sin(x-a_1)\sin(x-a_1-\omega)\ldots\\ \times\sin[x-a_1-(i-1)\omega]\ldots\\ \times\sin(x-a_n)\end{array}\right]}{\left[\begin{array}{c}\sin(k-1)\omega\sin(k-2)\omega\ldots\\ \times\sin\omega\sin\omega\ldots\\ \times\sin(i-k)\omega\end{array}\right]} F[a_1+(k-1)\omega].$$

Donc la limite de P correspondant à $\omega = 0$, que nous appellerons A, sera le coefficient de ω^{i-1} dans le développement de $P\times\omega^{i-1}$ en série, c'est-à-dire

$$A = \sum_{k=1}^{k=i}(-1)^{i-k} \left(\frac{d^{i-1}\dfrac{\left[\begin{array}{c}\sin(x-a_1)\sin(x-a_1-\omega)\ldots\\ \times\sin[x-a_1-(i-1)\omega]\omega^{i-1}\\ \times F[a_1+(k-1)\omega]\end{array}\right]}{\left[\begin{array}{c}\sin(k-1)\omega\sin(k-2)\omega\ldots\\ \times\sin\omega\sin\omega\sin2\omega\ldots\\ \times\sin(i-k)\omega\end{array}\right]}}{d\omega^{i-1}} \right)_{\omega=0}$$

$$\times\sin(x-a_{i+1})\ldots\sin(x-a_n).$$

On doit remarquer que, dans cette expression, on ne doit pas écrire $\sin(x - a_1)$ quand $k = 1$; on ne doit pas écrire $\sin(x - a_1 - \omega)$ quand $k = 2$, etc.

Pour obtenir A, nous employons la formule de Leibnitz, et nous avons

$$
\begin{aligned}
A = \sum_{k=1}^{k=i} (-1)^{i-k} & \frac{\sin(x - a_1)}{(k-1)!\,(i-k)!} \\
\times \Big\{ & \sin(x - a_1 - \omega) + \sin(x - a_1 - 2\omega) + \ldots \\
& + \sin[x - a_1 - (i-1)\omega] + \frac{(k-1)\omega}{\sin(k-1)\omega} \\
& + \frac{(k-2)\omega}{\sin(k-2)\omega} + \ldots + \frac{\omega}{\sin\omega} + \frac{\omega}{\sin\omega} + \ldots \\
& + \frac{(i-k)\omega}{\sin(i-k)\omega} + F[a_1 + (k-1)\omega] \Big\}^{(i-1)} \\
\times & \sin(x - a_{i+1}) \ldots \sin(x - a_n)
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
A = \sum_{k=1}^{k=i} & (-1)^{i-k} \frac{(i-1)!}{(i-k)!} \sin(x - a_1)\sin(x - a_{i+1}) \ldots \sin(x - a_n) \\
\times \Big\{ & \sum (-1)^{\alpha+\beta+\ldots+\lambda} \frac{1^\alpha . 2^\beta \ldots (i-1)^\lambda}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!} \\
& \times \sin\left(x - a_1 + \alpha\frac{\pi}{2}\right) \ldots \sin\left(x - a_1 + \lambda\frac{\pi}{2}\right) \\
& \times \frac{(k-1)^{u-1} F^{(n)}(a_1)}{u!\,p!\,q!\ldots m!} \left[\frac{(k-1)\omega}{\sin(k-1)\omega}\right]^{(p)}_{\omega=0} \ldots \left[\frac{(i-k)\omega}{\sin(i-k)\omega}\right]^{(m)}_{\omega=0} \Big\},
\end{aligned}
$$

où α, β, ..., λ, u, p, q, ..., m représentent toutes les solutions entières positives de l'équation

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda + u + p + q + \ldots + m = i - 1.$$

D'un autre côté, nous avons

$$\left[\frac{d^p(x \operatorname{coséc} x)}{dx^p}\right]_{x=0} = 2(2^{p-1} - 1)B_{p-1}$$

quand p est un nombre pair, et

$$\left[\frac{d^p(x \operatorname{coséc} x)}{dx^p}\right]_{x=0} = 0$$

quand p est un nombre impair, en représentant par B_{p-1} les nombres de Bernoulli. Donc

$$A = \sum X \sin(x - a_1) \sin\left(x - a_1 + \alpha\frac{\pi}{2}\right)\cdots$$
$$\times \sin\left(x - a_1 + \lambda\frac{\pi}{2}\right) \sin(x - a_{i+1})\ldots \sin(x - a_n).$$

où

$$X = (-1)^{\alpha+\beta+\ldots+\lambda+i-k}$$
$$\times \frac{2^{i-1}(i-1)!\,(k-1)^{u-1}.1^{\alpha}.2^{\beta}\ldots(i-1)^{\lambda}B_{p-1}B_{q-1}\ldots B_{m-1}}{(i-k)!\,\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,u!\,p!\,q!\ldots m!}$$
$$\times (k-1)^p(k-2)^q\ldots 1.1\ldots(i-k)^m$$
$$\times (r^{p-1}-1)(r^{q-1}-1)\ldots(r^{m-1}-1)\,F^{(n)}(a_1),$$

en donnant à α, β, γ, ..., λ, u, p, q, ..., m, k toutes les valeurs entières et positives qui vérifient l'équation

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda + u + p + q + \ldots + m = k - 1,$$

où k ne peut pas être supérieur à i, et où p, q, ..., m doivent être des nombres pairs.

En appelant B la limite correspondant à $\omega = 0$ de la deuxième partie de l'expression de $f(x)$, on peut écrire

$$B = \sum_{k=i+1}^{k=n} \frac{\sin^i(x - a_1)\sin(x - a_{i+1})\ldots \sin(x - a_n)}{\sin^i(a_k - a_1)\sin(a_k - a_{i+1})\ldots \sin(a_k - a_n)} f(a_k).$$

En substituant les expressions de A et B que nous venons d'obtenir dans la formule

$$f(x) = A + B,$$

on a la fonction $f(x)$ qui prend les valeurs données

$$f(a_1),\ f'(a_1),\ f''(a_1),\ \ldots,\ f^{(i)}(a_1),$$
$$f(a_{i+1}),\ f(a_{i+2}),\ \ldots,\ f(a_n).$$

Avec un simple changement de notation, en supposant que les fonctions données sont

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ \ldots,\ f^{(i)}(a),$$
$$f(b_1),\ f(b_2),\ f(b_3),\ \ldots,\ f(b_n),$$

on a

$$A = \sum X \sin(x-a)\sin\left(x-a+\alpha\frac{\pi}{2}\right)\ldots$$
$$\times \sin\left(x-a+\lambda\frac{\pi}{2}\right)\sin(x-b_1)\ldots\sin(x-b_n),$$
$$B = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\sin^i(x-a)\sin(x-b_1)\ldots\sin(x-b_n)}{\sin(b_k-a)\sin(b_k-b_1)\ldots\sin(b_k-b_n)} f(a_k).$$

En posant

$$b_2 = b_1+\omega,\quad b_3 = b_1+2\omega,\quad \ldots,\quad b_j = b_1+(j-1)\omega$$

dans les formules précédentes, on trouve la formule qui correspond au cas où sont données les valeurs suivantes :

$$f(a),\quad f'(a),\quad f''(a),\quad \ldots, f^{(i)}(a),$$
$$f(b_1),\quad f'(b_1),\quad f''(b_1),\quad \ldots, f^{(j)}(b_1),$$
$$f(b_{j+1}),\ f(b_{j+2}),\ f(b_{j+3}),\ \ldots,\ f(b_n).$$

Considérons maintenant le cas général. Si l'on donne les valeurs suivantes :

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ \ldots,\ f^{(i)}(a),$$
$$f(b),\ f'(b),\ f''(b),\ \ldots,\ f^{(j)}(b),$$
$$\ldots,\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots,$$
$$f(e),\ f'(e),\ f''(e),\ \ldots,\ f^{(m)}(e),$$

et si l'on cherche la fonction $f(x)$, on peut employer la formule suivante

$$f(x) = A + B + C + \ldots,$$

où

$$A = \sum X \sin(x-a)\sin\left(x-a+\alpha\frac{\pi}{2}\right)\ldots$$
$$\times \sin\left(x-a+\lambda\frac{\pi}{2}\right)\sin^j(x-b)\sin^l(x-c)\ldots\sin^m(x-e),$$
$$B = \sum X_1 \sin^i(x-a)\sin(x-b)\sin\left(x-b+\alpha\frac{\pi}{2}\right)\ldots$$
$$\times \sin\left(x-b+\lambda\frac{\pi}{2}\right)\sin^l(x-c)\ldots\sin^m(x-e),$$
$$C = \sum X_2 \sin^i(x-a)\sin^j(x-b)\sin(x-c)\sin\left(x-c+\alpha\frac{\pi}{2}\right)\ldots$$
$$\times \sin\left(x-c+\lambda\frac{\pi}{2}\right)\ldots\sin^m(x-e).$$

....;

et où les quantités X_1, X_2, ... dérivent de X par le changement de i en j et de $F(a)$ en $F_1(b)$ pour X_1, et de i en l et de $F(a)$ en $F_2(c)$ pour X_2, etc., étant

$$F(a) = \frac{f(a)}{\sin^j(a-b)\sin^l(a-c)\ldots\sin^m(a-e)},$$

$$F_1(b) = \frac{f(b)}{\sin^i(b-a)\sin^l(b-c)\ldots\sin^m(b-e)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ainsi les quantités α, β, ..., λ, u, p, ..., m, k représentent les solutions de l'équation

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda + u + p + q + \ldots + m = k - 1,$$

k étant inférieur à $i+1$ en X, à $j+1$ en X_1, à $l+1$ en X_2, etc.

Nous devons remarquer qu'en A on ne doit pas écrire $\sin(x-a)$ dans le terme correspondant à $k=1$, on ne doit pas écrire $\sin\left(x - a + \alpha\frac{\pi}{2}\right)$ dans le terme correspondant à $k=2$, etc. La même chose arrive en B, C, ... relativement à b, c, ...

Nous devons encore remarquer que le nombre des quantités α, β, ..., λ est $i-1$ en A, mais que, quand $k=2$, manque β; quand $k=3$, manque γ, etc. On doit faire la même observation à l'égard de B, C, ... Le nombre des quantités p, q, ..., m est $i-1$.

Enfin, quand quelqu'une des quantités α, β, ..., p, q, ..., $k-1$, $i-k$, u est nulle, le facteur correspondant ne doit pas exister dans la formule.

Les formules que nous venons de trouver résolvent la question d'interpolation proposée, c'est-à-dire qu'elles déterminent une fonction circulaire, qui prend, elle et ses dérivées, des valeurs données. Nous allons donc considérer maintenant la décomposition de la fraction correspondante.

III.

Soit $f(\sin x, \cos x)$ une fonction entière, homogène du degré $i+j+l+\ldots+m-1$. La formule de décomposition qui résulte de la formule précédente est

$$\begin{aligned}
&\frac{f(\sin x, \cos x)}{\sin^i(x-a)\sin^j(x-c)\ldots\sin^m(x-e)}\\
&\quad=\frac{A_1}{\sin(x-a)}+\frac{A_2\cot(x-a)}{\sin(x-a)}+\ldots+\frac{A_i\cot^{i-1}(x-a)}{\sin(x-a)}\\
&\quad+\frac{B_1}{\sin(x-b)}+\frac{B_2\cot(x-b)}{\sin(x-b)}+\ldots+\frac{B_j\cot^{j-1}(x-b)}{\sin(x-b)}\\
&\quad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et nous connaissons les coefficients A_1, A_2, A_3, ..., B_1, B_2, ...

Nous allons indiquer rapidement deux autres méthodes pour trouver les coefficients précédents, analogues à celles employées dans la décomposition des fractions rationnelles.

En posant

$$\varphi(x)=\sin^j(x-b)\sin^l(x-c)\ldots\sin^m(x-e),$$

nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{f(\sin x, \cos x)}{\varphi(x)}&=A_1\sin^{i-1}(x-a)\\
&+A_2\cos(x-a)\sin^{i-2}(x-a)+\ldots\\
&+A_i\cos^{i-1}(x-a)+K\cos^i(x-a).
\end{aligned}$$

Cette formule donne

$$A_i=\frac{f(\sin a, \cos a)}{\varphi(a)}.$$

En la différentiant, on trouve le résultat

$$\begin{aligned}
\frac{d\,\dfrac{f(\sin x, \cos x)}{\varphi(x)}}{dx}&=(i-1)A_1\sin^{i-2}(x-a)\cos(x-a)+\ldots\\
&+A_{i-1}\cos^{i-1}(x-a)\\
&+(i-1)A_i\cos^{i-2}(x-a)\sin(x-a)+\ldots,
\end{aligned}$$

qui donne

$$A_{i-1} = \frac{d\,\dfrac{f(\sin a, \cos a)}{\varphi(a)}}{da}.$$

De la même manière on trouve les autres coefficients en continuant les différentiations.

On peut aussi calculer les coefficients A_1, A_2, ... au moyen des équations qu'on obtient en égalant les coefficients des mêmes puissances de h dans l'identité suivante :

$$\begin{aligned} f(\sin a, \cos a) &+ \frac{df}{da} h + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{da^2} h^2 + \ldots \\ &= (A_1 \sin^{i-1} h + A_2 \cos h \sin^{i-2} h + \ldots + A_i \cos^{i-1} h) \\ &\quad \times [\varphi(a) + h\varphi'(a) + \tfrac{1}{2} h^2 \varphi''(a) + \ldots], \end{aligned}$$

qui donne

$$\begin{aligned} f(\sin a, \cos a) &= A_i\, \varphi(a), \\ f'(\sin a, \cos a) &= A_{i-1}\, \varphi(a) + A_i\, \varphi'(a), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Les formules précédentes appliquées au Calcul intégral donnent une formule de réduction d'intégrales.

En effet, au moyen de ces formules, on réduit l'intégration des fractions

$$\frac{f(\sin x, \cos x)}{\sin^i(x - a)\sin^j(x - b)\ldots},$$

$f(\sin x, \cos x)$ étant une fonction entière, homogène du degré $i + j + \ldots + m - 1$, à l'intégration des fonctions de la forme

$$\frac{\cos^t(x - a)}{\sin^{t+1}(x - a)},$$

qui sont le sujet des formules de réduction qu'on trouve dans tous les Traités de Calcul intégral.

On peut encore employer, pour l'intégration de cette fraction, la formule

$$\int \frac{\cos^t(x - a)}{\sin^{t+1}(x - a)}\, dx = -\int \frac{\cot^t(x - a)}{\sqrt{1 + \cot^2(x - a)}}\, d\cot(x - a).$$