Nouvelles annales de mathématiques

Ernest Lebon

Construction nouvelle des points d'intersection d'une droite et d'une conique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 338-342

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__338_1>

CONSTRUCTION NOUVELLE DES POINTS D'INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UNE CONIQUE (1);

PAR M. ERNEST LEBON.

---

1. Soit un cône de révolution à axe vertical, de sommet f, f' (*fig.* 1), dont la trace horizontale a pour diamètre la droite de front ac. Coupons ce cône selon une ellipse par le plan de bout $aa'b'$. On sait que la projection horizontale de la section est une ellipse dont ab est le grand axe et f un foyer.

Soit une droite mn, $a'b'$ située dans le plan $aa'b'$. D'après la solution connue pour trouver les points d'intersection d'une droite et d'un cône, il faut obtenir la trace horizontale du plan auxiliaire déterminé par la droite et le sommet du cône. Le point a_1, où mn coupe $a'a$, est un point de cette trace. On en construit un second c_1, en menant la droite passant par le sommet f, f' et par le point b', b_1 de mn, $a'b'$. La trace horizontale a_1c_1 du plan auxiliaire coupe celle du cône en i_1 et en j_1 : les droites fi_1 et fj_1 rencontrent mn aux points i et j, projections horizontales des points d'intersection de la droite et du cône donnés.

Remarquons que les points i et j appartiennent à la droite

---

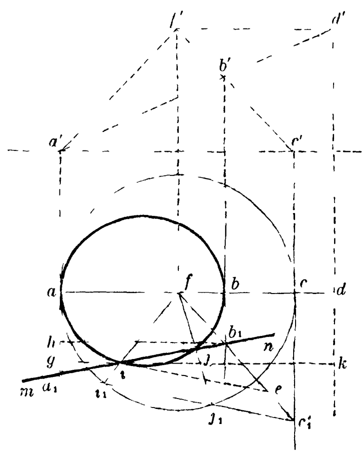
(1) Exposée à la *Société mathématique de France* (séance du 21 janvier 1885).

mn et à l'ellipse de grand axe *ab*, de foyer *f*, et que les explications précédentes sont applicables au cas où le plan sécant $aa'b'$ détermine dans le cône de révolution une hyperbole ou une parabole.

Il résulte des épures précédentes une construction des points d'intersection d'une droite et d'une conique, dont on connaît, en position, un foyer et les sommets situés sur l'axe focal. Voici cette nouvelle construction, qui est plus simple que celles que l'on connaît, notamment dans le cas de la parabole.

2. Soient une droite *mn* (*fig.* 1) [1] et une *ellipse* définie par son grand axe *ab* et un foyer *f*. On décrit

Fig. 1.



une circonférence *fa*, de centre *f*, ayant pour rayon la distance du foyer *f* à un sommet *a*; elle coupe *ab* en *c*. On mène sur *ab*, aux points *a*, *b*, *c*, les perpendicu-

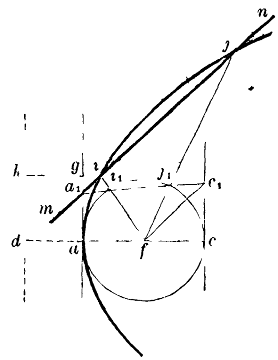
(1) Les lignes en traits pointillés sont inutiles pour la construction.

laires aa_1, bb_1, cc_1. La droite mn coupe aa_1 en a_1 et bb_1 en b_1; la droite fb_1 coupe cc_1 en c_1. La circonférence fa est rencontrée par la droite $a_1 c_1$ aux points i_1 et j_1 : les droites fi_1 et fj_1 coupent mn aux points i et j communs à cette droite et à l'ellipse.

La construction est la même dans le cas de l'*hyperbole* définie par son axe transverse et un foyer.

Dans le cas de la *parabole* (*fig.* 2), la construction

Fig. 2.



se simplifie, parce que, le sommet b étant rejeté à l'infini, la droite fb_1 devient une parallèle fc_1 à mn.

3. La démonstration du n° 1 exige que l'on connaisse la Géométrie descriptive et la Géométrie analytique. Dans ce qui suit, nous donnons une démonstration fondée sur cette propriété que l'on peut démontrer élémentairement : le rapport des distances d'un point d'une conique à un foyer et à la directrice correspondante est constant.

Soient une droite mn (*fig.* 1) et une *ellipse* dont le grand axe est ab, dont un foyer est f et la directrice correspondante dh. Nous obtenons sur mn le point i par la construction du n° 2.

Pour démontrer que le point i appartient à l'ellipse donnée, nous menons : par le point i la parallèle ie à a_1c_1, coupant fc_1 en e, et la parallèle ig à ab, coupant aa_1 en g; par le point b_1 la parallèle b_1h à ab, coupant aa_1 en h.

Les parallèles ie à a_1c_1, ig à b_1h, dans les triangles $a_1b_1c_1$, a_1b_1h, permettent d'écrire

$$\frac{a_1b_1}{a_1i} = \frac{c_1b_1}{c_1e}, \quad \frac{a_1b_1}{a_1i} = \frac{b_1h}{ig};$$

d'où l'on tire, en remarquant que b_1h égale ab,

$$(1) \qquad \frac{ab}{ig} = \frac{c_1b_1}{c_1e}.$$

On a de même, dans les triangles cfc_1, i_1fc_1,

$$\frac{c_1b_1}{c_1f} = \frac{cb}{cf}, \quad \frac{ii_1}{fi_1} = \frac{c_1e}{c_1f},$$

et, par suite,

$$(2) \qquad \frac{c_1b_1}{c_1e} = \frac{cb}{ii_1}.$$

En appelant $2a$ le grand axe et $2c$ la distance des foyers, les égalités (1) et (2) donnent

$$(3) \qquad \frac{ii_1}{ig} = \frac{c}{a}.$$

Maintenant prolongeons gi jusqu'à sa rencontre en k avec la directrice dk. Appelant φ et δ les distances if et ik de i à f et à dk, et remarquant que

$$fi_1 = a + c, \quad gk = dd = \frac{a}{c}(a + c),$$

nous avons

$$ii_1 = a + c - \varphi, \quad ig = \frac{a}{c}(a + c) - \delta,$$

d'où l'on tire, en vertu de l'égalité (3) et après les réductions,

$$\frac{\varphi}{\delta} = \frac{c}{a}.$$

Cette égalité montre que le point i appartient à l'ellipse considérée.

Pour l'*hyperbole*, la démonstration est analogue à la précédente.

Pour la *parabole*, définie par son sommet a et son foyer f (*fig.* 2), dk étant la directrice, on mène la perpendiculaire ig sur aa_1, et l'on a, d'après la similitude des triangles iga_1 et fcc_1, puis ii_1a_1 et fi_1c_1,

$$\frac{ig}{ia_1} = \frac{fc}{fc_1}, \quad \frac{ii_1}{ia_1} = \frac{fi_1}{fc_1},$$

d'où l'on tire $ii_1 = ig$, et par suite $\varphi = \delta$. Donc le point i appartient à la parabole considérée.

Le cas de la parabole mérite surtout d'être remarqué pour la simplicité de la construction et de la démonstration.