NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. JAGGI

Sur les complexes linéaires

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 334-337

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__334_1>

SUR LES COMPLEXES LINÉAIRES;

PAR M. E. JAGGI.

Dans le numéro du mois de février dernier des *Nouvelles Annales*, j'ai donné une démonstration géométrique de ce fait, que les normales aux trajectoires d'un solide dont le déplacement est assujetti à cinq conditions forment un complexe linéaire; en voici une démonstration analytique.

1. Je prends pour axe des z l'axe commun à tous les éléments d'hélices trajectoires correspondant à l'instant considéré. Si K est le pas commun à toutes ces hélices, leurs équations pourront s'écrire

$$x^2+y^2=r^2, \quad z=\mathrm{K}\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x};$$

d'où je tire les équations générales de ces courbes

$$\frac{-dx}{y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{\mathrm{K}}. \tag{1}$$

Soient

$$x=az+p, \quad y=bz+q$$

les équations d'une droite quelconque. Les cosinus directeurs de cette droite étant proportionnels à a, b, 1, pour que cette droite soit une normale, on doit avoir

$$a\,dx + b\,dy + dz = 0,$$

c'est-à-dire

$$-ay + bx + K = 0$$

ou, en tenant compte des équations de la droite,

$$aq - bp = K, \tag{2}$$

équation d'un complexe linéaire rapporté à son axe. Donc :

Les normales aux trajectoires de tous les points d'un solide de forme invariable, dont le déplacement est assujetti à cinq conditions, forment à chaque instant un complexe linéaire dont l'axe coïncide avec l'axe instantané de rotation glissant du déplacement, et dont le paramètre est égal au pas commun des hélices trajectoires.

La réciproque, démontrée par M. Picard, s'obtient facilement en intégrant les équations (1) qui résultent de ce que toute droite $(abpq)$ du complexe (2) est normale à la courbe (xyz).

2. Je vais maintenant donner quelques nouvelles applications des théorèmes précédemment démontrés.

Considérons un corps solide de forme invariable aux divers points duquel sont appliquées des forces quelconques et supposons d'abord que, par l'action de ces forces, les différents points du solide décrivent des courbes trajectoires. Partons d'une position d'équilibre du corps. Tout déplacement virtuel infiniment petit du corps à partir de cette position sera un déplacement hélicoïdal pour lequel les normales aux courbes trajectoires formeront un complexe linéaire.

On peut donc énoncer immédiatement le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Si les lignes d'action des forces appliquées aux différents points d'un solide qui décrivent des courbes trajectoires forment un complexe linéaire, le solide sera en équilibre.*

Cette condition est suffisante, mais non pas nécessaire. Le théorème général sera celui-ci :

THÉORÈME II. — *Quand les divers points d'un solide décrivent des courbes trajectoires sous l'action de plusieurs forces qui y sont appliquées, la condition nécessaire et suffisante d'équilibre est que les diverses résultantes des forces appliquées aux différents points du corps appartiennent à un complexe linéaire.*

Ce théorème peut encore s'énoncer ainsi :

On ne trouble pas l'équilibre ou le mouvement d'un solide de forme invariable dont les points décrivent des courbes trajectoires, en appliquant en ses divers points des forces dont les diverses résultantes appartiennent à un complexe linéaire.

3. Si maintenant, sous l'action des forces qui leur sont appliquées, les différents points du solide décrivent des surfaces trajectoires, on sait qu'à chaque instant les normales aux surfaces trajectoires, en tous les points du corps, forment une congruence linéaire (même tome, p. 85) ; par conséquent :

THÉORÈME III. — *Si un corps solide de forme invariable se déplace de manière que ses points décrivent des surfaces trajectoires sous l'action des forces qui* *leur sont appliquées, le solide sera en équilibre toutes les fois que les diverses résultantes des forces appliquées aux divers points du corps appartiendront à une congruence linéaire.*