Nouvelles annales de mathématiques

E. Humbert

Note sur le développement d'un déterminant

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 289-294

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__289_1>

NOTE SUR LE DÉVELOPPEMENT D'UN DÉTERMINANT;

PAR M. E. HUMBERT,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nancy.

Je me propose d'exposer dans cette Note une méthode très simple pour obtenir le développement d'un déterminant à l'aide des mineurs relatifs à K lignes quelconques. Cette méthode n'est pas nouvelle; je crois seulement l'avoir exposée très simplement.

Je désignerai par Δ le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^n \\ A_2^1 & A_2^2 & A_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_n^1 & A_n^2 & A_n^n \end{vmatrix},$$

et par $\Delta_{\alpha\beta\ \lambda}^{\alpha'\beta'\ \lambda'}$ le déterminant mineur formé avec les éléments des lignes horizontales (lignes) d'indices $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ et ceux des lignes verticales (colonnes) d'indices α', $\beta', \ldots, \lambda'$, en nombre égal aux précédents.

Je suppose qu'on veuille développer Δ en mettant en évidence les déterminants mineurs formés avec les éléments des K lignes dont les indices sont a, b, ..., l, que je suppose rangés par ordre de grandeur. J'appelle a', b', ..., m' les indices des lignes qui restent, rangés aussi par ordre de grandeur.

Un terme quelconque de Δ est alors

$$(-1)^N A_a^\alpha A_b^\beta \ldots A_l^\lambda A_{a'}^{\alpha'} A_{b'}^{\beta'} \ldots A_{m'}^{\mu'},$$

N désignant le nombre total des inversions formées par les indices supérieurs entre eux et les indices inférieurs entre eux.

Comptons d'abord le nombre des inversions formées par les indices inférieurs; a, b, ..., l entre eux ne forment pas d'inversions; de même pour a', b', ..., l'. Mais il y a $a-1$ nombres inférieurs à a et placés après lui; $b-2$ nombres inférieurs à b et placés après lui; $l-K$ nombres inférieurs à l et placés après lui; donc il y a

$$a+b+\ldots+l-1-2-\ldots-K$$

ou

$$a+b+\ldots+l-\frac{K(K+1)}{2},$$

inversions formées par les indices inférieurs.

Maintenant, comptons le nombre des inversions formées par les indices supérieurs. Il y a d'abord P inversions formées par les indices α, β, ..., λ entre eux; Q inversions formées par les indices α', β', ..., μ' entre eux. Il n'y a plus qu'à compter les inversions formées par les indices α, β, ..., λ avec les indices α', β', ..., λ', μ'. Pour cela, on peut ranger les indices α, β, ..., λ par ordre de grandeur α_1, β_1, ..., λ_1. Alors il y a α_1-1 nombres inférieurs à α_1 et placés après lui; β_1-2 nombres inférieurs à β_1 et placés après lui; λ_1-K nombres inférieurs à λ_1 et placés après lui. Donc le nombre total des inversions formées par les indices supérieurs est

$$P + Q + \alpha + \beta + \dots - \lambda - \frac{K(K+1)}{2},$$

en remarquant que

$$\alpha_1 + \beta_1 + \dots + \lambda_1 = \alpha + \beta + \dots + \lambda,$$

et l'on a

$$N = a + b + \dots + l + \alpha + \beta + \dots + \lambda + P + Q - K(K+1).$$

Le terme général de Δ peut alors s'écrire

$$(-1)^{a+b+\dots+l+\alpha+\beta+\dots+\lambda}(-1)^{P} A_a^{\alpha} A_b^{\beta} \dots A_l^{\lambda} (-1)^{Q} A_{a'}^{\alpha'} A_{b'}^{\beta'} \dots A_{m'}^{\mu'},$$

car $K(K+1)$ est un nombre pair et peut être enlevé de l'exposant de -1.

Si l'on échange entre eux d'une manière quelconque les indices $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ et aussi les indices $\alpha', \beta', \dots, \mu'$, on obtient tous les termes du produit

$$(-1)^{a+b+\dots+l+\alpha+\beta+\dots+\lambda} \Delta_{ab\dots l}^{\alpha\beta\dots\lambda} \Delta_{a'b'\dots m'}^{\alpha'\beta'\dots\mu'};$$

et, enfin, en posant pour $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, K nombres quelconques parmi les n nombres $1, 2, \dots, n$, et de toutes les manières possibles, on a

$$\Delta = (-1)^{a+b+\dots+l} \Sigma (-1)^{\alpha+\beta+\dots+\lambda} \Delta_{ab\dots l}^{\alpha\beta\dots\lambda} \Delta_{a'b'\dots m'}^{\alpha'\beta'\dots\mu'}.$$

C'est le développement annoncé.

Si l'on voulait mettre en évidence les mineurs formés avec les éléments des K colonnes d'indices $a, b, \dots, l$, on raisonnerait d'une façon toute semblable et l'on arriverait à

$$\Delta = (-1)^{a+b+\dots+l} \Sigma (-1)^{\alpha+\beta+\dots+\lambda} \Delta_{\alpha\beta\dots\lambda}^{ab\dots l} \Delta_{\alpha'\beta'\dots\mu'}^{a'b'\dots m'}.$$

Première application. — Si l'on développe le déterminant

$$C = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n & p_1^1 & p_1^2 & \dots & p_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n & p_2^1 & p_2^2 & \dots & p_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n & p_n^1 & p_n^2 & \dots & p_n^n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_1^1 & b_1^2 & \dots & b_1^n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_2^1 & b_2^2 & \dots & b_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_n^1 & b_n^2 & \dots & b_n^n \end{vmatrix},$$

en se servant des mineurs des n premières colonnes, on trouve immédiatement

$$C = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1^1 & b_1^2 & \dots & b_1^n \\ b_2^1 & b_2^2 & \dots & b_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n^1 & b_n^2 & \dots & b_n^n \end{vmatrix}.$$

L'exposant de -1 est

$$1 + 2 + \dots + n + 1 + 2 + \dots + n,$$

c'est-à-dire un nombre pair.

Si l'on développe de la même manière le déterminant

$$C' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & b_1^1 & b_1^2 & \dots & b_1^n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_2^1 & b_2^2 & \dots & b_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_n^1 & b_n^2 & \dots & b_n^n \\ a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n & p_1^1 & p_1^2 & \dots & p_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n & p_2^1 & p_2^2 & \dots & p_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n & p_n^1 & p_n^2 & \dots & p_n^n \end{vmatrix},$$

on trouve

$$C' = (-1)^n \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1^1 & b_1^2 & \dots & b_1^n \\ b_2^1 & b_2^2 & \dots & b_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n^1 & b_n^2 & \dots & b_n^n \end{vmatrix}.$$

L'exposant de -1 est ici

$$n+1+n+2+\ldots+n+n+1+2+\ldots+n;$$

en enlevant un nombre pair $2(1+2+\ldots+n)$, il se réduit à n^2, qui est de la même parité que n.

Seconde application. — Considérons les matrices

$$\left\|\begin{matrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ a_p^1 & a_p^2 & \ldots & a_p^n \end{matrix}\right\|, \quad \left\|\begin{matrix} b_1^1 & b_1^2 & \ldots & b_1^n \\ b_2^1 & b_2^2 & \ldots & b_2^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ b_p^1 & b_p^2 & \ldots & b_p^n \end{matrix}\right\|,$$

et le déterminant

$$C = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_p^1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_p^2 & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_p^n & 0 & 0 & \ldots & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_1^1 & b_1^2 & \ldots & b_1^n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_2^1 & b_2^2 & \ldots & b_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_p^1 & b_p^2 & \ldots & b_p^n \end{vmatrix}.$$

Développons-le en mettant en évidence les mineurs des p premières colonnes. Pour cela, prenons p lignes parmi les n premières, et soient $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ leurs indices, on aura

$$C = (-1)^{1+2+\ldots+p} \sum (-1)^{\alpha+\beta+\ldots+\lambda} A_{\alpha\beta\ldots\lambda}$$
$$\times \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & -1 & 0 \\ b_1^1 & b_1^2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & b_1^n \\ b_2^1 & b_2^2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & b_2^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot\cdot \\ b_p^1 & b_p^2 & \cdot\cdot & \ldots & \ldots & \ldots & b_p^n \end{vmatrix},$$

$A_{\alpha\beta\ldots\lambda}$ désignant le déterminant d'ordre p formé avec les p colonnes d'indices $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ dans la matrice A.

Dans le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \cdot & 0 & -1 & 0 \\ b_1^1 & b_1^2 & \dots & \cdot & \dots & \dots & b_1^n \\ b_2^1 & b_2^2 & \dots & \cdot & \dots & \dots & b_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \cdot & \dots & \dots & \dots \\ b_p^1 & b_p^2 & \dots & \cdot & \dots & \dots & b_p^n \end{vmatrix},$$

il y a $n-p$ lignes, les premières, qui ne contiennent pas les éléments b, et ce sont celles qu'on obtient en supprimant dans les n colonnes de droite du déterminant C les lignes d'indices $\alpha, \beta, \dots, \lambda$; donc, dans chacune d'elles, -1 est situé dans une colonne d'indice autre que $\alpha, \beta, \dots, \lambda$. Si donc on développe ce dernier déterminant en mettant en évidence le mineur des $n-p$ premières lignes, qui n'est pas nul, et qui est égal à $(-1)^{n-p}$, puisque les seuls termes différents de zéro sont les termes situés sur la diagonale principale et égaux à -1, on trouve pour ce déterminant

$$(-1)^{1+2+\dots+n-p+1+2+\dots+n-\alpha-\beta-\dots-\lambda+n-p}\, B_{\alpha\beta\dots\lambda}.$$

Donc, finalement, on a

$$C = (-1)^{n(n+p)} \Sigma A_{\alpha\beta\dots\lambda} B_{\alpha\beta\dots\lambda}.$$

Remarque. — Si p est plus grand que n, chacun des déterminants $A_{\alpha\beta\dots\lambda}$, $B_{\alpha\beta\dots\lambda}$ contient une ligne de zéros et est identiquement nul; C est donc nul.

Les deux applications que nous venons d'indiquer conduisent, comme on sait, facilement aux théorèmes relatifs à la multiplication des déterminants et à la multiplication des matrices.