P. GIAT

Concours général de 1881

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 265-274

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__265_0>

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1881.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

Par M. P. GIAT,
Elève du lycée Saint-Louis (classe de M. Lucas).

Trouver le lieu des points, tels que les pieds des six normales qu'on peut mener de l'un quelconque d'entre eux à un ellipsoïde donné à trois axes inégaux se séparent en deux groupes de trois points dont les plans respectifs soient parallèles entre eux (¹).

En prenant pour axes de coordonnées les axes de l'ellipsoïde, l'équation générale des quadriques passant par les pieds des normales issues du point (α, β, γ) est

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1&+\lambda\left[a^2y(x-\alpha)-b^2x(y-\beta)\right]\\ &+\mu\left[b^2z(y-\beta)-c^2y(z-\gamma)\right]\\ &+\nu\left[c^2x(z-\gamma)-a^2z(x-\alpha)\right]=0.\end{aligned}\right.$$

Pour que cette équation représente un système de deux plans parallèles, il faut d'abord que l'ensemble des termes du second degré soit carré parfait. Ici l'on aura

$$\left(\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}\pm\frac{z}{c}\right)^2.$$

(¹) L'énoncé complet comportait une deuxième partie (*voir* 3ᵉ série, t. I, p. 189), qui n'est pas traitée ici.

Prenons d'abord $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2$. Nous en déduisons

$$\lambda=\frac{2}{ab\,(a^2-b^2)},\quad \mu=\frac{2}{bc\,(b^2-c^2)},\quad \nu=\frac{2}{ca\,(c^2-a^2)},$$

et l'équation (1) devient

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2 &+2\frac{x}{a}\left(\frac{b\beta}{a^2-b^2}-\frac{c\gamma}{c^2-a^2}\right)\\ &+2\frac{y}{b}\left(\frac{c\gamma}{b^2-c^2}-\frac{a\alpha}{a^2-b^2}\right)\\ &+2\frac{z}{c}\left(\frac{a\alpha}{c^2-a^2}+\frac{b\beta}{b^2-c^2}\right)-1=0.\end{aligned}$$

Ensuite il faut que l'ensemble des termes du premier degré soit, à un facteur constant près, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}$.

On a donc

$$\frac{b\beta}{a^2-b^2}-\frac{c\gamma}{c^2-a^2}=\frac{c\gamma}{b^2-c^2}-\frac{a\alpha}{a^2-b^2}=\frac{a\alpha}{c^2-a^2}-\frac{b\beta}{b^2-c^2},$$

ou, en simplifiant,

$$a\alpha(b^2-c^2)=b\beta(c^2-a^2)=c\gamma(a^2-b^2).$$

Les deux plans parallèles sont alors

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\pm 1.$$

Le lieu du point (α, β, γ) avec les diverses combinaisons de signes se composera par conséquent de quatre droites passant par l'origine et les pieds des normales issues de tous les points de ces droites seront dans les quatre systèmes de deux plans parallèles obtenus en joignant les extrémités des axes de l'ellipsoïde.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES;

PAR M. P. GIAT,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Lucas).

Étant donné un triangle ABC *inscrit dans un cercle de rayon* R, *on mène les bissectrices intérieures des angles* A, B, C. *Soient* A_1, B_1, C_1 *les points où elles rencontrent le cercle :*

1° *Désignant par* S, S_1 *les aires des triangles* ABC, $A_1B_1C_1$ *et par* d *le diamètre du cercle inscrit au triangle* ABC, *on propose de démontrer que l'on a*

$$\frac{S_1}{S} = \frac{R}{d}.$$

2° *On considère une suite indéfinie des triangles* ABC, $A_1B_1C_1$, ..., $A_nB_nC_n$, ..., *tous inscrits dans le même cercle et dont chacun se déduit du précédent comme dans l'énoncé ci-dessus le triangle* $A_1B_1C_1$ *se déduit du triangle* ABC. *Démontrer que, lorsque le nombre entier* m *augmente indéfiniment, le triangle* $A_{2m}B_{2m}C_{2m}$ *tend vers une position limite* $\alpha\beta\gamma$; *dans les mêmes conditions, le triangle* $A_{2m+1}B_{2m+1}C_{2m+1}$ *tend aussi vers une position limite* $\alpha'\beta'\gamma'$; *les deux triangles limites* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ *sont équilatéraux et symétriquement placés par rapport au centre du cercle.*

3° *Démontrer que, si l'on prend pour unité le rayon* R *du cercle, le produit des nombres qui mesurent les diamètres des cercles inscrits aux triangles* ABC, $A_1B_1C_1$, ..., $A_nB_nC_n$ *tend vers une limite lorsque* n *augmente indéfiniment.*

1° Désignons par a, b, c, A, B, C, r, R les éléments de ABC, par a_1, b_1, c_1, A_1, B_1, C_1 les éléments de $A_1B_1C_1$.

On voit facilement que

$$(1)\qquad \begin{cases} A_1 = \dfrac{B+C}{2} = 90^\circ - \dfrac{A}{2}, \\ B_1 = \dfrac{C+A}{2} = 90^\circ - \dfrac{B}{2}, \\ C_1 = \dfrac{A+B}{2} = 90^\circ - \dfrac{C}{2}. \end{cases}$$

Calculons S_1 :

$$S_1 = \frac{1}{2} b_1 c_1 \sin A_1;$$

or

$$b_1 = 2R \sin B_1, \quad c_1 = 2R \sin C_1,$$

donc

$$S_1 = 2R^2 \sin A_1 \sin B_1 \sin C_1,$$

ou, d'après les égalités (1),

$$S_1 = 2R^2 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}.$$

Calculons maintenant S :

$$S = pr,$$

mais

$$p = 4R \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}.$$

En remplaçant, il vient

$$S = 4Rr \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2};$$

par suite,

$$\frac{S}{S_1} = \frac{R}{2r} = \frac{R}{d}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

2° Évaluons les angles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des différents triangles.

On a

$$
\begin{aligned}
A_1 &= 90^\circ - \frac{A}{2}, \\
A_2 &= 90^\circ - \frac{A_1}{2} = 90^\circ - \frac{90^\circ}{2} + \frac{A}{2^2}, \\
A_3 &= 90^\circ - \frac{A_2}{2} = 90^\circ - \frac{90^\circ}{2} + \frac{90^\circ}{2^2} - \frac{A}{2^3}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
A_n &= 90^\circ - \frac{A_{n-1}}{2} = 90^\circ - \frac{90^\circ}{2} + \frac{90^\circ}{2^2} + \ldots \\
&\qquad + (-1)^{n-1}\frac{90^\circ}{2^{n-1}} + (-1)^n \frac{A}{2^n}.
\end{aligned}
$$

Lorsque n devient très grand, $\frac{1}{2^n}$ tend vers 0 et A_n tend vers

$$
\begin{aligned}
&90^\circ\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \ldots\right) - \frac{90^\circ}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \ldots\right) \\
&= \frac{1}{2}\, 90^\circ \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = 60^\circ.
\end{aligned}
$$

On voit ainsi que la limite de A_n est 60°. On trouverait de même que les limites de B_n et C_n sont 60°. Le triangle $A_n B_n C_n$ tend donc à être équilatéral.

Maintenant O étant le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, on a

$$
\begin{aligned}
AOA_1 &= 2C + A = 180^\circ - (B - C), \\
A_1OA_2 &= 180^\circ - (B_1 - C_1) = 180^\circ + \frac{B - C}{2};
\end{aligned}
$$

par suite

$$AOA_2 = \frac{B - C}{2}.$$

De même,

$$
\begin{aligned}
A_2OA_4 &= 360^\circ - (A_2OA_3 + A_3OA_4) = \frac{B - C}{2^3}, \\
A_4OA_6 &= \frac{B - C}{2^5}, \quad \ldots.
\end{aligned}
$$

Les arcs $AA_2, A_2A_4, \ldots$ forment donc les termes d'une progression géométrique dont la raison est $\frac{1}{4}$. Aucun des arcs AA_2, A_2A_4, $\ldots$, $A_{2m-1}A_{2m}$ n'empiétant l'un sur l'autre, la somme de ces arcs représente la distance AA_{2m}. A la limite, on aura

$$A\alpha = \frac{4}{3}\,AA_2.$$

On connaît donc la position limite vers laquelle tendent les triangles d'ordre pair.

On trouverait de même que les triangles d'ordre impair ont une position limite $\alpha'\beta'\gamma'$, telle que

$$A\alpha' = \pi + \frac{4}{3}\,AA_2.$$

Les triangles formés tendent donc vers deux triangles équilatéraux ayant leurs sommets *symétriques par rapport* au centre du cercle.

3° Si l'on prend pour unité le rayon R, on aura

$$d = \frac{S}{S_1}, \quad d_1 = \frac{S_1}{S_2}, \quad \ldots, \quad d_n = \frac{S_n}{S_{n+1}}.$$

Multipliant membre à membre, il vient

$$dd_1\ldots d_n = \frac{S}{S_{n+1}}.$$

Si n augmente indéfiniment, la limite de S_{n+1} est $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. Donc le produit $dd_1\ldots d_n$ tend vers une limite $\frac{4S}{3\sqrt{3}}$.

Note. — La même question a été résolue par MM. Lacombe et G. Barran.

RHÉTORIQUE;

Par M. P. GIAT,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Lucas).

Un tronc de cône est tel que sa hauteur est moyenne proportionnelle entre les diamètres de ses deux bases. On propose : 1° de démontrer qu'on peut inscrire une sphère dans ce tronc de cône; 2° la hauteur h étant donnée, de déterminer les rayons des deux bases, de manière que la surface totale du tronc de cône soit équivalente à un cercle de rayon a. Discussion.

1° Tout revient à démontrer que l'apothème du tronc est égal à $R+r$; car alors le trapèze obtenu en coupant le tronc par un plan passant par l'axe sera tel que la somme des côtés non parallèles soit égale à la somme des bases, c'est-à-dire sera circonscriptible.

Or, d'après l'énoncé,

$$(1) \qquad 4Rr = h^2.$$

Maintenant

$$a^2 = h^2 + (R-r)^2 = h^2 + (R+r)^2 - 4Rr = (R+r)^2,$$

d'où

$$a = R + r. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

2° La surface totale du tronc est égale à

$$\pi(R+r)(R+r) + \pi(R^2+r^2) = \pi a^2.$$

On a donc

$$(R+r)^2 + R^2 + r^2 = a^2,$$

ou

$$2(R+r)^2 = a^2 + \frac{h^2}{2},$$

en remarquant que

$$R^2 + r^2 = (R + r)^2 - 2Rr = (R + r)^2 - \frac{h^2}{2};$$

d'où

$$(2) \qquad R + r = \frac{\sqrt{2a^2 + h^2}}{2}.$$

Les équations (1) et (2) donnent le produit et la somme des quantités R et r; ces quantités sont donc les racines de l'équation

$$X^2 - \frac{\sqrt{2a^2 + h^2}}{2} X + \frac{h^2}{4} = 0.$$

Discussion. — Pour que ces racines soient réelles, il faut que

$$\frac{2a^2 + h^2}{4} - h^2 \geq 0,$$

d'où

$$a^2 \geq \frac{3h^2}{2}.$$

Le produit des racines étant positif, les deux racines sont de même signe; leur somme étant positive, elles sont positives.

Dans le cas où $a^2 = \frac{3h^2}{2}$, la surface totale est minimum, $R = r$, et le tronc de cône devient un cylindre.

Remarque. — Le volume du tronc est égal au produit de sa surface totale par le $\frac{1}{6}$ de sa hauteur : on le démontrerait sans difficulté.

SECONDE;

PAR M. ÉMILE BÉNÉZECH,
Élève du Prytanée militaire.

Soit un carré ABCD; *par deux sommets opposés* A *et* C *de ce carré, on mène, d'un même côté par rap-*

port au plan du carré, les droites AK, CL *perpendiculaires à ce plan. On prend sur* AK *un point* A′ *dont la distance au centre du carré est égale au côté du carré et, sur* CL, *un point* C′ *dont la distance au point* A′ *est égale au double du côté du carré.*

1° *Démontrer que la droite* A′C′ *est perpendiculaire au plan* BDA′;

2° *Former, en appelant a le côté du carré, l'expression du volume de chacun des tétraèdres* A′ABD, C′CBD, C′A′BD.

Soit O le point d'intersection des deux diagonales AC et BD.

Pour démontrer que la droite C′A′ est perpendiculaire au plan BDA′, il suffit de constater qu'elle est perpendiculaire aux deux droites OA′, DA′ qui passent par son pied dans le plan. Or on a

$$AA' = \frac{a}{\sqrt{2}};$$

puis, menant A′E parallèle à AC, on a

$$C'E = a\sqrt{2},$$

et, par suite,

$$CC' = \frac{3a}{\sqrt{2}};$$

donc

$$\overline{C'O}^2 = \frac{9a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 5a^2 = \overline{OA'}^2 + \overline{C'A'}^2,$$

ce qui prouve que C′A′ est perpendiculaire sur OA′.

On a encore

$$\overline{C'D}^2 = \frac{9a^2}{2} + a^2 = \frac{11a^2}{2}, \quad \overline{DA'}^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2},$$

donc

$$\overline{C'D}^2 - \overline{DA'}^2 = \frac{11a^2}{2} - \frac{3a^2}{2} = 4a^2 = \overline{C'A'}^2.$$

La proposition est par conséquent démontrée.

Les valeurs précédentes de AA′, CC′ permettent de calculer sur-le-champ les volumes des tétraèdres dont il s'agit dans l'énoncé, et l'on a

$$\text{vol. AA}'\text{BD} = \frac{a^2}{2}\,\frac{a}{3\sqrt{2}} = \frac{a^3}{6\sqrt{2}},$$

$$\text{vol. C}'\text{CBD} = \frac{a^2}{2}\,\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3}{2\sqrt{2}},$$

$$\text{vol. C}'\text{A}'\text{BD} = \frac{a^2}{\sqrt{2}}\,\frac{2a}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

Note. — La même question a été résolue par M. Léopold Maison, élève du Prytanée militaire.