Nouvelles annales de mathématiques

Willy Th. Lewy

Sur les puissances des nombres

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 235-245
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__235_1>

SUR LES PUISSANCES DES NOMBRES;

PAR M. WILLY TH. LEWY.

1. On peut déduire de la théorie des restes la remarque suivante :

Lorsque l'on considère les puissances successives d'un nombre par rapport à un nombre quelconque, mais constant, si l'on retranche des différentes puissances autant de fois le nombre constant qu'il est possible, les restes de la division des puissances par le nombre constant se reproduisent périodiquement et la période se compose d'une certaine quantité de nombres, nécessairement inférieure au nombre constant considéré.

Si l'on considère de cette manière les puissances successives d'un nombre dont la somme des chiffres est égale à 2 (2, 11, 20, 101, 1001, ...), il est facile de vérifier par le calcul que les restes de la division par 9 des puissances successives de ces nombres se reproduisent périodiquement et sont, pour une période,

$$(-2,\ -4)+1,\ +2,\ +4,\ -1,\ -2,\ -4.$$

Nota. — Les chiffres entre parenthèses indiquent les premiers restes et sont placés entre parenthèses de manière à mieux faire voir que la période $+1$ indique qu'il faut ajouter 1 à la puissance considérée pour en faire un multiple de 9; -1, qu'il faut retrancher 1.

De même, la période des restes, par rapport au nombre constant 9, des puissances successives des nombres dont la somme des chiffres est égale à 4 (4, 13, 22, 31, 40, 103, ...), est

$$-4,\ +2,\ -1.$$

La série des puissances des nombres dont la somme des chiffres est égale à 5 (5, 14, 23, ...), a pour période des restes

$$+4,\ +2,\ +1,\ -4,\ -2,\ -1,$$

qui est précisément l'inverse de la période donnée pour les puissances de 2, 11, 101, ...

Pour les puissances des nombres dont la somme des chiffres est 7 (7, 16, 25, ...), on a la période

$$+2,\ -4,\ -1,$$

inverse de celle des puissances de 4, 13, ...

Enfin, pour les puissances successives des nombres dont la somme des chiffres est 8(8, 17, 26, ...), les restes des divisions par 9 sont

$$+1, \quad -1.$$

Remarque. — Les nombres dont les puissances successives, divisées par 9, donnent des séries de restes inverses, sont différents de 3, comme 2 et 5, 4 et 7, comme le sont précisément les nombres 3, 6 et 9 dont les restes, 0, peuvent être considérés comme formant des périodes inverses.

2. On peut conclure de la théorie des restes que, si l'on divise les puissances d'un nombre par les nombres 10, 100, 1000, ..., les restes se reproduiront périodiquement, c'est-à-dire que, si l'on considère les puissances successives d'un nombre, les chiffres des dizaines, des centaines, des mille, etc., se reproduiront périodiquement.

De l'examen du tableau que l'on peut former en considérant des puissances successives des quarante premiers nombres, on peut déduire les remarques suivantes :

1° Les puissances des nombres impairs, dont le chiffre des dizaines est un nombre pair, n'ont, comme chiffre des dizaines, que des nombres pairs.

2° Les puissances des nombres impairs, dont le chiffre des dizaines est un nombre impair, ont, comme chiffres des dizaines, alternativement un nombre impair et un nombre pair.

3° Lorsque, dans la période des chiffres des dizaines des puissances d'un nombre quelconque, tous les chiffres se trouvent compris une fois, et une fois seulement, un chiffre pair alterne avec un chiffre impair.

4° Lorsque tous les chiffres se trouvent répétés deux fois, et deux fois seulement, dans la série des chiffres des dizaines des puissances d'un nombre pair, deux chiffres pairs alternent avec deux chiffres impairs.

5° Lorsque tous les chiffres se trouvent répétés deux fois, et deux fois seulement, dans la série des chiffres des dizaines des puissances d'un nombre impair, un chiffre pair alterne avec un chiffre impair.

6° Les périodes des chiffres des centaines des puissances d'un nombre quelconque peuvent se diviser en parties de périodes.

Les périodes des chiffres des centaines se composent de deux, cinq ou dix parties.

Ces parties comprennent autant de chiffres qu'en contient la période complète des chiffres correspondants des dizaines.

Suivant que la période des chiffres des dizaines est plus ou moins considérable, la période correspondante des chiffres des centaines se compose d'un nombre inversement plus ou moins restreint de parties.

7° Les différentes parties des périodes des chiffres des centaines des puissances d'un nombre peuvent se déduire les unes des autres en ajoutant à chaque chiffre correspondant de la partie précédente soit un nombre constant, soit deux ou quatre nombres constants qui peuvent se réduire à un ou deux nombres constants en valeur absolue, tantôt négatifs, tantôt positifs, suivant une loi constante.

Suivant que ces nombres constants sont plus ou moins grands, le nombre des parties de période est inversement plus ou moins grand.

On conçoit en effet que, si le nombre constant est 1, il faille dix parties de période pour retrouver la première partie ; que si, au contraire, les nombres constants sont

2 et 4, il faille seulement cinq parties de période pour retrouver la première partie.

8° Lorsque la période des chiffres des dizaines des puissances d'un nombre se compose d'un nombre pair de chiffres, on peut la subdiviser en deux parties qui comprennent chacune la moitié des chiffres et dont la seconde peut se déduire de la première, suivant une loi constante.

9° Lorsque la période des chiffres des dizaines se compose d'un nombre de chiffres impair, on peut, en ajoutant un nombre constant au chiffre précédent dans la période, trouver le suivant.

D'ailleurs une période de chiffres de dizaines n'est composée d'un nombre impair de chiffres que lorsque tous les chiffres qui la composent sont les cinq chiffres impairs ou zéro.

10° Les nombres dont les périodes des chiffres des unités offrent de grandes analogies les uns avec les autres sont précisément ceux dont la somme des chiffres des unités est égale à 10

0 et 10, 1 et 9, 2 et 8, 3 et 7, 4 et 6, 5 et 5.

11° D'une manière générale, on peut dire qu'il n'y a, pour tous les nombres depuis 0 jusqu'à l'infini, que vingt périodes de chiffres des dizaines distinctes, qu'on peut résumer dans le Tableau synoptique suivant :

La période des chiffres des dizaines des nombres qui se terminent par

01, 21, 41, 61, 81	comprend	1	fois	tous les chiffres	
02, 22, 42, 62, 82	»	2	»	»	
03, 23, 43, 63, 83	»	4	»	»	pairs
04, 24, 44, 64, 84	»	1	»	»	
05, 25, 45, 65, 85	est	2			
06, 26, 46, 66, 86	»	1	»	»	

07, 27, 47, 67, 87	comprend	4	fois tous	les chiffres	pairs
08, 28, 48, 68, 88	»	2	»	»	
09, 29, 49, 69, 89	»	2			pairs
10, 30, 50, 70, 90	est 0				
11, 31, 51, 71, 91	»	1	»	»	
12, 32, 52, 72, 92	»	2	»	»	
13, 33, 53, 73, 93	»	2	»	»	
14, 34, 54, 74, 93	»	1	»	»	
15, 35, 55, 75, 95	est 2, 7				
16, 36, 56, 76, 96	»	1	»	»	impairs
17, 37, 57, 77, 97	»	2	»	»	
18, 38, 58, 78, 98	»	2	»	»	
19, 39, 59, 79, 99	»	1	»	»	
20, 40, 60, 80, 00	est 0				

12° Les chiffres qui composent les périodes des dizaines ne se reproduisent pas dans le même ordre pour les nombres dont la différence est 20 ; mais, étant donné l'ordre des chiffres d'une des périodes, on peut trouver l'ordre des chiffres des quatre périodes correspondantes, en prenant soit tous les 13, soit tous les 15, soit tous les 17 chiffres et d'une manière générale tous les $n^{\text{ièmes}}$ chiffres de la période donnée. Ainsi, étant donnée la période des chiffres des dizaines d'un nombre qui se termine par 03, on a celle des nombres qui se terminent par 23, en prenant tous les 13 chiffres de la première; celle des nombres qui se terminent par 43, en prenant tous les 15 chiffres de la première, celle des nombres qui se terminent par 63, en prenant tous les 17 chiffres de la première, et ainsi de suite.

13° On pourrait de même tirer l'ordre des chiffres des périodes des dizaines des nombres qui se terminent par 41, 61, 81, en prenant tous les 17, 13 et 19 chiffres des nombres qui composent la période des chiffres des dizaines des puissances des nombres qui se terminent par 21, etc.

14° Souvent même, on peut déduire les chiffres des dizaines des puissances successives d'un nombre par la considération de la période correspondante pour un nombre inférieur à dix unités seulement.

C'est ainsi qu'on peut obtenir la période des chiffres des puissances de

12	en prenant les	9	chiffres de la période	correspondante	de	2
14	»	3	»	»	»	4
16	»	3	»	»	»	6
18	»	5	»	»	»	8
21	»	2	»	»	»	11
22	»	13	»	»	»	12

....

15° Pour 3 et 13, 7 et 17, 9 et 19, on conçoit *a priori* qu'il ne peut en être absolument de même, puisque 3, 7 et 9 n'admettent que des chiffres pairs, tandis que 13, 17 et 19 admettent aussi des chiffres impairs. Pour pouvoir comparer les périodes des chiffres des dizaines des puissances successives de ces nombres, il ne faudra considérer que les chiffres pairs dans 13, 17 et 19, et alors, pour avoir la suite des chiffres pairs, dans

13	on prend tous les	6	chiffres de la période	correspondante	de	3
19	»	4	»	»	»	9

Vu la particularité de la période des chiffres des dizaines des puissances successives du nombre 7, il est assez naturel qu'il y ait une remarque particulière à faire sur la relation qui existe entre la période des chiffres des dizaines de 7 et de 17 ; elle se tire de la comparaison obtenue en ne considérant que les chiffres pairs de part et d'autre.

On a pour 7 : — 4400, et pour 17 :

(826) — 44 — (628) — 00.

16° Quelques nombres, comme 7, 18, 32, ont des périodes des chiffres des dizaines assez particulières, en ce sens qu'elles sont un peu différentes de ce que, suivant la loi générale, elles devraient être. Ces particularités (qui ne sont pas, à proprement parler, des exceptions, puisqu'on peut par une loi constante, mais particulière, tirer les périodes des chiffres des dizaines de ces nombres, en les extrayant des périodes des chiffres des dizaines des puissances des nombres différant de 20 de ces nombres) doivent être traitées à part. On pourrait ainsi faire un tableau synoptique à l'aide duquel, et sans aucun calcul, on pourrait immédiatement trouver, par une simple lecture, la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un nombre quelconque donné, et la racine quelconque d'un nombre quelconque.

USAGE DES TABLES CITÉES PLUS HAUT.

Soit à trouver, par exemple, la 5ᵉ puissance du nombre 15.

Examinons le Tableau dont nous avons parlé précédemment.

On y voit :

1° Que le chiffre des unités est toujours 1;

2° Que la période des chiffres des dizaines est 2,7; mais que le chiffre des dizaines de la première puissance est 1; donc le chiffre des dizaines de toutes les puissances d'ordre impair, et par conséquent de la cinquième puissance, est 7;

3° Que la période des chiffres des centaines est 3,6; mais que les chiffres des centaines des deux premières puissances sont 0 et 2; donc le chiffre des centaines de toutes les puissances d'ordre impair, et par conséquent de la cinquième puissance, est 3;

4° Que la période des chiffres des mille est 0,9; mais que les chiffres des mille des trois premières puissances ne rentrent pas dans la période; donc le chiffre des mille de toutes les puissances d'ordre impair (sauf les trois premières), et par conséquent de la cinquième puissance, est 9;

5° Que la période des chiffres des dix mille est 5,9; mais que les chiffres des dix mille des quatre premières puissances ne rentrent pas dans la période; donc le chiffre des dix mille de toutes les puissances d'ordre impair (sauf les quatre premières), et par conséquent de la cinquième puissance, est 5;

6° Que le chiffre des cent mille est 7.

7° Que tous les chiffres représentant les unités d'ordre supérieur sont o.

On conclut donc, par une simple lecture du Tableau dont nous parlons, que la cinquième puissance de 15 est 759375.

3. Il peut arriver dans certains calculs qu'on soit amené à chercher la racine d'indice inconnu d'un nombre, qu'on sait être une puissance exacte. Pour trouver cette racine, il faudrait décomposer le nombre donné en ses facteurs premiers; mais cette manière d'opérer peut être longue.

Au contraire, en se servant des Tables dont il a été question plus haut, on peut résoudre le problème par une simple lecture et d'une manière, par conséquent, beaucoup plus rapide.

On demande, par exemple, la racine d'indice inconnu du nombre 5159780352, qui est par hypothèse une puissance exacte.

Nota. — Comme nous n'avons fait les Tables que pour les nombres inférieurs à 40, nous avons pris la puissance d'un nombre inférieur à 40. Faisons la somme des chiffres de ce nombre; en retranchant de cette somme autant de fois le nombre 9 qu'il est possible, le reste est 0; on sait, par les remarques que nous avons faites au commencement, qu'il n'y a que les puissances des nombres multiples de 3 qui donnent ce reste; le nombre donné, étant, par hypothèse, une puissance exacte d'un nombre inférieur à 40, est donc une puissance d'un des nombres suivants :

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39.

Mais le nombre donné est un nombre pair; il ne peut donc être une puissance d'un nombre impair; éliminons les nombres impairs de la série considérée, il reste comme racines possibles du nombre donné les nombres

6, 12, 18, 24, 30, 36.

30 s'élimine de suite; car toutes ses puissances ont 0 pour chiffre des unités.

De plus, le chiffre des unités du nombre donné est 2; on voit dans la Table que les nombres terminés par 4 et 6 n'admettent pas 2 dans la période des chiffres des unités de leurs puissances. Le nombre considéré est donc une puissance de 12 ou de 18.

Pour savoir quelle est la racine du nombre, il faut avoir recours au chiffre des dizaines de ce nombre; ce chiffre est 5.

Si nous regardons la Table, nous voyons que, parmi les chiffres qui composent la période des chiffres des dizaines des puissances de 12, se trouve le chiffre 5; le nombre considéré peut donc être une puissance de 12.

Si nous considérons, dans la Table, la période des chiffres des dizaines des puissances de 18, nous voyons que cette période ne comprend pas le chiffre 5; le nombre donné ne peut donc pas être une puissance de 18.

Le nombre donné est donc une puissance de 12.

Cherchons maintenant quel est l'exposant du nombre 12 dans le nombre considéré.

Le chiffre des unités du nombre donné est 2 ; or on voit dans la Table que la période des chiffres des unités des puissances successives est 2, 4, 8, 6; une puissance de 12 qui se termine par le chiffre 2 est d'ordre (multiple de $4+1$), c'est-à-dire 1, 5, 9, 13, 17, ...

D'autre part, on voit dans la Table que la période des chiffres des dizaines des puissances successives de 12 est

1, 4, 2, 3, 3, 8, 0, 9, 5, 2, 8, 5, 7, 6, 6, 1, 9, 0, 4, 7.

Le chiffre des dizaines du nombre donné est 5 ; donc, par rapport à ce chiffre seulement, le nombre donné est une puissance d'ordre neuvième ou douzième,

$$9 = \text{multiple de } 4+1; \quad \text{mais} \quad 12 \gtrless \text{multiple de } 4+1.$$

L'exposant de la racine 12 dans le nombre donné est donc 9.

Le nombre donné 5159780352 est donc $= 12^9$.

Pour peu qu'on ait un peu l'habitude des Tables dont nous avons parlé, on résout le problème avec d'autant plus de rapidité que (sauf ce qui concerne la première opération, faire la somme des chiffres du nombre donné) on n'a généralement à considérer que les deux ou les trois derniers chiffres du nombre donné.