NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CESÀRO

E. CESÀRO

Sur le coefficient de stabilité des massifs (Extraits d'une lettre à M. Deschamps)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 196-200

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__196_1>

SUR LE COEFFICIENT DE STABILITÉ DES MASSIFS

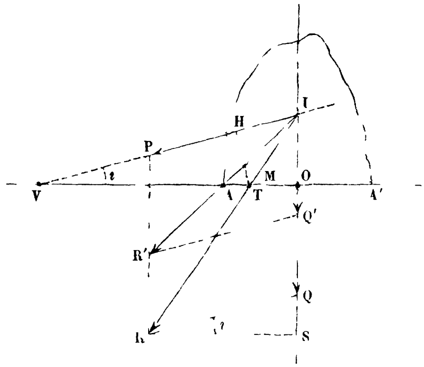
(Extraits d'une lettre à M. Deschamps);

PAR M. E. CESARO.

.... Soit P la résultante des forces extérieures, qui agissent sur un massif de poids Q, reposant sur un plan horizontal. Considérons la section faite dans le massif par le plan PQ. Soient respectivement (*fig.* 1) O, V, T les points où le plan de base est rencontré par les forces Q, P et par leur résultante. Soit, enfin, A le *pied extérieur* du massif, autour duquel on suppose que celui-ci tend à tourner, sous l'action de P. Posons

$$OA = x, \quad OV = \lambda x, \quad OT = \theta x.$$

Fig. 1.



On sait que le *coefficient de stabilité* s'exprime par

$$N = \frac{\text{moment de stabilité}}{\text{moment de renversement}} = \frac{Qx}{P(\lambda x - x)\sin i}$$
$$= \frac{1}{\lambda - 1}\,\frac{Q}{P \sin i}.$$

Or les triangles semblables UOT, USR donnent

$$\frac{Q + P\sin i}{P\cos i} = \frac{\lambda x \operatorname{tang} i}{\theta x},$$

d'où

$$\frac{Q}{P\sin i} = \frac{\lambda - \theta}{\theta}.$$

Conséquemment

$$(1) \qquad N = \frac{1}{\theta}\,\frac{\lambda - \theta}{\lambda - 1}.$$

.... La formule (1) peut être écrite ainsi

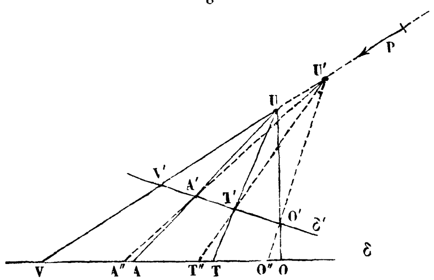
$$N = \frac{OA.VT}{OT.VA} = \frac{(OT + TA)(VA + AT)}{OT.VA} = 1 + \frac{OV.AT}{OT.AV}.$$

Il en résulte que *l'excès du coefficient de stabilité sur l'unité est égal au rapport anharmonique des points* O, T, A, V. Cette conclusion est très importante.

Elle est le point de départ d'une série de constructions, ayant pour but de rechercher graphiquement l'épaisseur à donner à la base d'un massif, et d'éviter ainsi l'emploi gênant d'une équation de second degré....

.... Toute ponctuelle de quatre éléments, telle que OTAV (*fig.* 2), représente donc un certain massif. Or on sait

Fig 2



que deux ponctuelles projectives ont même rapport anharmonique, et, réciproquement, deux ponctuelles à rapports anharmoniques égaux sont toujours projectives, c'est-à-dire que l'on peut les déduire l'une de l'autre par une série d'opérations projectives. Il en résulte que, si, d'un centre quelconque, tel que U, on projette, sur la droite δ', la ponctuelle OTAV ; puis, du centre U', sur la droite δ, la ponctuelle obtenue O'T'A'V', en O''T''A''V'', etc., toutes ces ponctuelles représentent des massifs différents, mais possédant tous le même degré de stabilité. Réciproquement, si l'on considère, sur le terrain, les ponctuelles représentatives d'une suite de massifs, offrant tous le même degré de stabilité, deux quelconques de ces ponctuelles sont projectives.

.... Aussitôt que mes occupations me le permettront, je vous montrerai comment on peut, d'une manière simple, utiliser les propriétés géométriques, dont je viens de faire un rappel rapide, pour le tracé graphique des dimensions d'un massif. Le problème est un peu plus compliqué qu'on ne le croirait au premier abord, et, bien qu'il admette une solution générale, celle-ci ne se présente sous une forme susceptible d'application pratique, que si l'on a affaire à des massifs simples, tels que *murs droits,* à section verticale *rectangulaire, trapezoïdale,* etc. Quoi qu'il en soit, on peut toujours ramener le cas général à celui où le massif est soumis à un effort horizontal....

.... Dans la pratique, on fait varier N de 1,5 à 2. La valeur pratique maxima du coefficient de stabilité correspond à une particularité géométrique intéressante. En effet, on reconnaît immédiatement que *la ponctuelle représentative d'un massif, dont le coefficient de stabilité est égal à* 2, *est une forme harmonique.* De cette propriété résultent, pour le cas de $N = 2$, de grandes simplifications dans les opérations graphiques. On peut observer que, si H est la projection de T sur UV, les angles OHT, AHT sont égaux. En outre, M étant le milieu de OA, on a

$$MT.MV = MA^2, \quad ....$$

... La ponctuelle OTAV étant projetée, du centre U, sur la verticale PR, le rapport anharmonique se réduit au simple rapport $\frac{RR'}{PR'}$. On a donc $PR = N.PR'$. Réciproquement, si l'on démontrait directement la dernière égalité, on aurait, en projetant du centre U, une démonstration simple de tout ce qui précède. Or, écrire la condition d'équilibre stable, en prenant un coefficient de stabilité N, revient à écrire la condition d'*équilibre strict,* en ne comptant, pour la stabilité, que sur la $N^{\text{ième}}$ partie du poids du massif, c'est-à-dire en supposant que l'on ait affaire à un poids $Q' = \frac{Q}{N}$. Puisque, dans cette hypothèse, l'équilibre serait *strict*, la résultante des forces P, Q' doit passer par A. On a donc bien

$$\frac{PR'}{PR} = \frac{UQ'}{UQ} = \frac{1}{N}.$$

.... A cause de $\theta < 1$, la formule (1) montre que $N > \frac{1}{\theta}$. Si l'on voulait s'astreindre à faire tomber le point d'application de la résultante totale à l'intérieur du *noyau central* de la base du massif, on devrait adopter, pour N, des valeurs trop élevées. Ainsi, dans le cas d'une section horizontale *rectangulaire*, on devrait prendre $N > 3$: l'application du principe du noyau central conduit donc à des conséquences trop rigoureuses. Aussi peut-on affirmer que, dans la pratique, ce principe est toujours violé. En effet, à cause de $N \leqq 2$, on a $\theta > \frac{1}{2}$. En prenant $\theta = \frac{1}{2}$, on est toujours assuré de la stabilité du massif; car la formule (1) devient

$$N = 2 - \frac{AO}{AA'}.$$