Nouvelles annales de mathématiques

WEILL

Sur quelques équations indéterminées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 189-193

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__189_0>

SUR QUELQUES ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES;

PAR M. WEILL.

I. Soit l'équation

$$ax^2 + by^2 = z^{2p+1},$$

dans laquelle a, b et p sont des entiers donnés quelconques. Posons

$$z = au^2 + bt^2,$$

nous pourrons poser

$$x\sqrt{a} + yi\sqrt{b} = (u\sqrt{a} + ti\sqrt{b})^{2p+1}$$

et prendre

$$x = u^{2p+1}a^p - C_{2p+1}^2 bt^2 u^{2p-1} a^{p-1} + C_{2p+1}^4 b^2 t^4 u^{2p-3} a^{p-2} + \ldots,$$

$$y = C_{2p+1}^1 u^{2p} a^p t - C_{2p+1}^3 u^{2p-2} a^{p-1} b t^3 + \ldots.$$

On a ainsi *un* système de solutions, avec deux entiers arbitraires u et t, de l'équation proposée qui présente une grande généralité.

II. Soit l'équation

$$x^2 + by^2 = z^m,$$

m étant un entier quelconque.

Posons

$$z = u^2 + bt^2,$$

nous pourrons poser

$$x + yi\sqrt{b} = (u + ti\sqrt{b})^m$$

et prendre

$$x = u^m - C_m^2 bt^2 u^{m-2} + \ldots,$$
$$y = C'_m u^{m-1} t - C_m^3 u^{m-3} t^3 b + \ldots,$$

et l'on a *un* système de solutions, avec deux entiers arbitraires u et t, de l'équation.

III. Soit l'équation

$$x^2 - Ay^2 = N^2,$$

A et N étant deux entiers positifs donnés.

On a

$$x^2 = (yi\sqrt{A} + N)(yi\sqrt{A} - N).$$

Posons

$$x = (ui\sqrt{A} + t)(ui\sqrt{A} - t).$$

d'où

$$t^2 - Au^2 = N, \quad 2tu = y,$$
$$x = Au^2 + t^2, \quad x + y\sqrt{A} = (u\sqrt{A} + t)^2.$$

Considérons

$$x_1 + y_1\sqrt{A} = (y\sqrt{A} + x)^2 = (u\sqrt{A} + t)^{2.2},$$
$$x_2 + y_2\sqrt{A} = (y_1\sqrt{A} + x_1)^2 = (u\sqrt{A} + t)^{2.2.2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x_p + y_p\sqrt{A} = (u\sqrt{A} + t)^{2^{p+1}}.$$

On voit que, si l'on connaît une solution entière u, t de l'équation

$$t^2 - Au^2 = N,$$

on en déduira une solution entière x, y de l'équation

$$x^2 - Ay^2 = N^2,$$

puis une solution entière x_1, y_1 de l'équation

$$x^2 - Ay^2 = N^4,$$

puis une solution x_2, y_2 de l'équation

$$x^2 - Ay^2 = N^8,$$

et ainsi de suite.

En particulier, nos formules donnent une suite de solutions de l'équation

$$x^2 - Ay^2 = 1,$$

quand on connaît une première solution ; soient $x = \alpha$, $y = \beta$ cette solution ; p étant un entier quelconque, les valeurs α_p, β_p, données par l'égalité

$$\alpha_p + \beta_p \sqrt{A} = (\alpha + \beta \sqrt{A})^{2p+1},$$

formeront une solution; et les valeurs $N^h \alpha_p$ et $N^h \beta_p$ formeront une solution de l'équation

$$x^2 - Ay^2 = N^{2h}.$$

On connaît l'application des fractions continues à l'équation

$$x^2 - Ay^2 = 1.$$

IV. Soient des quantités successives $a, a_1, a_2, \ldots$, liées par la relation récurrente

$$a_k = 2a_{k-1}^2 - 1.$$

Posons

$$a^2 - Au^2 = 1, \quad y_1 = 2au,$$
$$a_1 = Au^2 + a^2 = 2a^2 - 1,$$
$$a_1 + y_1\sqrt{A} = (u\sqrt{A} + a)^2,$$
$$a_2 + y_2\sqrt{A} = (a_1 + y_1\sqrt{A})^2,$$

d'où

$$a_2 = a_1^2 + Ay_1^2 = 2a_1^2 - 1$$

et

$$a_2 + y_2\sqrt{A} = (u\sqrt{A} + a)^{2^2},$$
$$a_2 = A^2u^4 + 6a^2Au^2 + a^4 = (a^2 - 1)^2 + 6a^2(a^2 - 1) + a^4.$$

En posant

$$2^p = 2m, \quad m = 2^{p-1},$$

on aura

$$a_p + y_p\sqrt{A} = (u\sqrt{A} + a)^{2m},$$
$$a_p = (Au^2)^m + C_{2m}^2 a^2 (Au^2)^{m-1} + \ldots,$$
$$a_p = (a^2 - 1)^m + C_{2m}^2 a^2 (a^2 - 1)^{m-1} + \ldots.$$

On peut rapprocher cette formule de celle qui donne le développement de $\cos m\varphi$ en fonction de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, tiré de la formule de Moivre dans le cas particulier où m est une puissance de 2 ; mais le procédé actuel pour trouver la valeur de a_p est affranchi de la considération des imaginaires. On trouve, en développant,

$$\begin{aligned}2a_p = (2a)^{2m} - \frac{2m}{1}(2a)^{2m-2} + \frac{2m(2m-3)}{1.2}(2a)^{2m-4} \\ - \frac{2m(2m-4)(2m-5)}{1.2.3}\,2a^{2m-6} \\ + \frac{2m(2m-5)(2m-6)(2m-7)}{1.2.3.4}(2a)^{2m-8} - \ldots\end{aligned}$$

V. En remplaçant, dans la loi de récurrence indiquée, a_p, a_{p-1}, ... par $\lambda a_p + \beta$, $\lambda a_{p-1} + \beta$, on voit que l'équation aux différences finies

$$\varphi(n) = A[\varphi(n-1)]^2 + B\varphi(n-1) + C$$

peut s'intégrer au moyen du développement de $\cos m\varphi$ en fonction de $\cos\varphi$, quand on a la relation

$$C = \frac{B^2 - B - 2}{2A}.$$

Considérons encore des quantités $a_1, a_2, \ldots, a_p$, liées par la formule de récurrence

$$a_p = 4a_{p-1}^3 - 3a_{p-1}.$$

Si a_1 est moindre que 1, on pourra poser

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos\varphi, \\ a_2 &= \cos 3\varphi, \\ a_3 &= \cos 3^2\varphi, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{aligned}$$

donc, dans ce cas, a_p s'obtiendra en fonction de a_1 par le développement connu de $\cos m\varphi$; le résultat trouvé ainsi subsiste évidemment, même quand a_1 est plus grand que 1, c'est-à-dire quelconque.

En posant

$$a_p = \lambda\varphi(p) + \beta,$$

on voit que l'équation

$$\varphi(n) = \mathrm{A}[\varphi(n-1)]^3 + \mathrm{B}[\varphi(n-1)]^2 + \frac{\mathrm{B}^2 - 9\mathrm{A}}{3\mathrm{A}}\varphi(n-1) + \frac{\mathrm{B}^3 - 36\mathrm{AB}}{27\mathrm{A}^2}$$

s'intègre au moyen du développement de $\cos m\varphi$ en fonction de $\cos\varphi$.

On peut continuer l'application de ce procéde. On généralise les formules précédentes, en remplaçant $\varphi(n)$ par une fonction rationnelle ou même irrationnelle de $\psi(n)$, en désignant par $\psi(n)$ une fonction nouvelle, et l'on arrive à former des équations aux différences finies que l'on intègre par le procédé indiqué, et dont l'intégration directe présente des difficultés.