NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

WEILL

Sur une identité algébrique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 184-188

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__184_1>

SUR UNE IDENTITÉ ALGÉBRIQUE;

PAR M. WEILL.

Je me propose de trouver quatre polynômes entiers satisfaisant à l'identité

$$X^2Y + Y^2Z + Z^2U - U^2X = 0.$$

En posant

$$Y = \lambda X, \quad Z = \mu X, \quad U = \rho X,$$

on a

$$\lambda + \lambda^2\mu + \mu^2\rho + \rho^2 = 0;$$

d'où

$$1 - 4\mu(\mu^2\rho + \rho^2) = K^2, \quad \lambda = \frac{-1 \pm K}{2\mu}$$

et

$$\mu^6 - \mu(K^2 - 1) = L^2, \quad \rho = \frac{-\mu^3 \pm L}{2\mu}.$$

On peut écrire la dernière équation sous la forme

$$\mu^6 - L^2 = \mu(K^2 - 1).$$

On satisfera à cette relation si l'on prend

$$\mu^3 - L = \mu h(K - 1), \quad \mu^3 + L = \frac{K + 1}{h},$$

d'où

$$K = \frac{2\mu^3 h + \mu h^2 - 1}{\mu h^2 + 1}, \quad L = \frac{\mu^3 - \mu^4 h^2 + 2\mu h}{\mu h^2 + 1}.$$

A ces valeurs correspondent, pour ρ et λ, les valeurs

$$\rho' = \frac{h - h^2\mu^3}{\mu h^2 - 1}, \qquad \rho'' = \frac{-h - \mu^2}{\mu h^2 + 1},$$

$$\lambda' = \frac{\mu^3 h - 1}{\mu(\mu h^2 + 1)}, \qquad \lambda'' = \frac{-h^2 - \mu^2 h}{\mu h^2 - 1},$$

Si l'on associe une des valeurs de ρ avec une des valeurs de λ, successivement, on obtient quatre systèmes de solutions. Considérons le système ρ', λ'.

Il donne

$$U = h\frac{X^3 - hZ^3}{X^2 + Xh^2Z}, \quad Y = \frac{-UX}{hZ};$$

d'où

$$U = h(X - h^2Z) + \frac{h^2Z^2}{X}\,\frac{Xh^3 - Z}{X + h^2Z}.$$

On peut poser

$$Xh^3 - Z = P(X + h^2Z),$$
$$h^2Z^2P = RX,$$

et l'on a successivement

$$Z(Ph^2 + 1) = X(h^3 - P),$$
$$X = Q(Ph^2 - 1),$$
$$Z = Q(h^3 - P),$$
$$h^2Q^2(h^3 - P)^2P = RQ(Ph^2 + 1),$$
$$Q = S(Ph^2 + 1),$$
$$R = Sh^2P(h^3 - P)^2,$$
$$Y = \frac{-UX}{hZ} = \frac{-X[X - h^2Z + ShP(h^3 - P)^2]}{Z};$$

d'où, en remplaçant X et Z par leurs valeurs,

$$S = T(h^3 - P).$$

On peut faire, d'ailleurs, $T = 1$, et l'on obtient les formules suivantes :

$$
(\text{I}) \quad \left\{
\begin{aligned}
X &= (h^3 - P)(Ph^2 + 1)^2,\\
Z &= (h^3 - P)^2(Ph^2 + 1),\\
Y &= -(Ph^2 + 1)(P^3 h + 3Ph^2 - h^5 + 1),\\
U &= h(h^3 - P)(P^3 h + 3Ph^2 - h^5 + 1)
\end{aligned}
\right.
$$

Si l'on remplace X, Y, Z, U par leurs valeurs dans l'identité proposée, on obtient

$$
(\text{A}) \quad h(P - h^3)^3 + (Ph^2 + 1)^3 \equiv (1 + h^5)(P^3 h + 3Ph^2 - h^5 + 1).
$$

L'identité (A) va nous donner des résultats relatifs à certaines équations indéterminées; et d'abord, elle donne une infinité de solutions, avec un paramètre arbitraire λ, de l'équation

$$
ax^3 + y^3 = (1 + a^5)z.
$$

Ce sont

$$
\begin{aligned}
x &= \lambda - a^3,\\
y &= \lambda a^2 + 1,\\
z &= \lambda^3 a + 3\lambda a^2 - a^5 + 1
\end{aligned}
$$

De même, l'équation

$$
x^3 + y^3 = (1 + a^{10})z
$$

admet comme solutions

$$
\begin{aligned}
x &= \lambda a - a^{10}\\
y &= 1 - \lambda a^6,\\
z &= \lambda^3 a^3 + 3\lambda a^6 - a^{10} - 1
\end{aligned}
$$

Dans l'identité (A) posons $P = \alpha h^3$ et disposons de α de manière que la fonction

$$
P^3 h - 3Ph^2 - h^5 + 1
$$

soit carré parfait; on trouve $\alpha = 1$, solution illusoire, et $\alpha = \frac{1}{4}$; on en déduit, après quelques transformations et en posant $h^5 = z$, l'identité fort simple

$$
(\text{B}) \qquad (z + 4)^3 - 27z^2 = (1 + z)(z - 8)^2
$$

De cette identité, résulte *une* solution d'une classe d'équations indéterminées; a et m étant deux entiers quelconques, l'équation

$$x^3+y^3=(1+a^{3m})z^2$$

a pour solution

$$x=-3a^{2m},$$
$$y=a^{3m}+4,$$
$$z=a^{3m}-8.$$

L'équation

$$a^2x^3+y^3=(1+a^{3m+1})z^2$$

admet comme solution

$$x=-3a^{2m},$$
$$y=4+a^{3m+1},$$
$$z=a^{3m+1}-8.$$

Enfin l'équation

$$ax^3+y^3=(1+a^{3m+2})z^2$$

admet comme solution

$$x=-3a^{2m+1},$$
$$y=4+a^{3m+2},$$
$$z=a^{3m+2}-8.$$

L'identité (B) se généralise en remplaçant z par $\frac{z}{t}$ et donne

$$(C)\qquad (z-4t)^3-27tz^2=(z+t)(z-8t)^2.$$

Elle fournit *une* solution de nouvelles équations indéterminées, que l'on forme aisément, et qui sont

$$x^3+y^3=b(1+a^{3m})z^2,$$
$$x^3+b^2y^3=b(1+ba^{3m})z^2,$$
$$x^3-by^3=b(1+b^2a^{3m})z^2,$$
$$a^2x^3+y^3=b(1+a^{3m+1})z^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$ax^2+by^2=z^2.$$

Reprenons l'étude du système ρ', λ' et la valeur

$$U = (X - h^2 Z) h + \frac{h^2 Z^2}{X} \frac{X h^3 - Z}{X + h^2 Z}.$$

On peut poser

$$\begin{aligned} X h^3 - Z &= R X, \\ h^2 Z^2 R &= S(X + h^2 Z). \end{aligned}$$

En développant les calculs, on arrive à une solution très simple du problème et qui est donnée par les formules

$$(\text{II}) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= P(1 + P h^2), \\ Y &= h P^3 - 1, \\ Z &= P^2(1 + P h^2), \\ U &= h P(1 - h P^3). \end{aligned} \right.$$

Le système ρ', λ'' donne la solution

$$(\text{III}) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= (P h^2 + 1)^2, \\ Y &= -h(P h^2 + 1)(P^2 + h), \\ Z &= (P h^2 + 1)(h^3 - P), \\ U &= h(P^3 h + 3 P h^2 - h^5 + 1). \end{aligned} \right.$$

Le système ρ'', λ'' donne la solution

$$(\text{IV}) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= 1 - h^2 Z, \\ U &= 2 h^3 Z - h - Z^2(h^5 + 1), \\ Y &= -2 h^4 Z + h^2 + h Z^2(h^5 + 1). \end{aligned} \right.$$

Toutes ces formules, dans lesquelles P et h sont des quantités quelconques, peuvent se généraliser en remplaçant P et h par $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$, et supprimant ensuite le dénominateur commun; il ne restera plus qu'à remplacer A, B, C, D par des polynômes entiers par rapport à des variables quelconques, pour avoir des systèmes de solutions comportant une très grande indétermination; de là on pourra tirer un nombre indéfini de nouvelles identités algébriques.