H. Picquet

Sur l’enveloppe des droites qui coupent deux cercles harmoniquement

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 183-184

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__183_1>

SUR L'ENVELOPPE DES DROITES QUI COUPENT DEUX CERCLES HARMONIQUEMENT;

PAR M. H. PICQUET.

J'ai démontré dans ma *Géométrie analytique* (p. 508), comme conséquence de propriétés des invariants communs à deux coniques, que *l'enveloppe des droites qui coupent deux cercles harmoniquement est une conique ayant pour foyers les centres des deux cercles et tangente aux tangentes à ces cercles en leurs points d'intersection*. En voici une autre démonstration qui n'a peut-être pas été remarquée.

Soient O et O′ les centres des deux cercles, R et R′ leurs rayons, A et B leurs points d'intersection supposés réels : d'après la définition de la conique en question, le cercle O″, lieu des projections des foyers sur les tangentes, passe par les points A et B. Cela posé, soient α et β les points d'intersection d'une tangente quelconque de cette conique avec le cercle O, soient γ et δ ses points d'intersection avec le cercle O′. Projetons le point O en C sur cette droite; C est le milieu de $\alpha\beta$ et appartient au cercle O″. On a donc

$$\overline{CO}^2 + \overline{CO'}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AO'}^2 = R^2 + R'^2$$

ou

$$R^2 - \overline{CO}^2 = \overline{CO'}^2 - R'^2,$$

ou

$$\overline{C\alpha}^2 = C\gamma . C\delta.$$

C. Q. F. D.

N. B. — Cette démonstration ne préjuge rien sur la réalité des points α, β, γ, δ; elle prouve que, quoi qu'il arrive, ils sont conjugués harmoniques. Mais on sait qu'alors, si deux points conjugués sont imaginaires conjugués, les deux autres sont nécessairement réels : il suit de là qu'un des deux couples $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ est toujours réel.

Si les points d'intersection A et B des deux cercles étaient imaginaires, il est clair qu'aucune droite réelle ne pourrait rencontrer les deux cercles en quatre points harmoniques.