Nouvelles annales de mathématiques

G.-H. Halphen

Formules d'algèbre. Résolution des équations du troisième et du quatrième degré

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 17-35

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__17_0>

FORMULES D'ALGÈBRE. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU TROISIÈME ET DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. G.-H. HALPHEN.

Dans ce petit Mémoire on trouvera démontrés, par les moyens les plus élémentaires, des résultats importants que l'on considère d'habitude comme étant réservés à la théorie des covariants. Sur quelques points même ces résultats dépassent un peu ce qui se rencontre dans les meilleurs Ouvrages, notamment la décomposition des polynômes du quatrième degré en facteurs linéaires.

Une proposition très simple et, je crois, très curieuse sert ici de fondement. Je vais l'établir d'abord.

PROPOSITION. — *Soient f et φ deux polynômes entiers, d'un même degré n, par rapport à une variable x; la quantité ci-après, composée avec les dérivées de ces polynômes, est une constante*

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}(f\varphi) = f\varphi^{(n)} - f'\varphi^{(n-1)} + f''\varphi^{(n-2)} - \ldots \\ + (-1)^{n-1}f^{(n-1)}\varphi' + (-1)^n f^{(n)}\varphi.\end{aligned}\right.$$

Si, en effet, l'on prend la dérivée de $(f\varphi)$, en observant que $f^{(n+1)}$ et $\varphi^{(n+1)}$ sont nulles, on voit tous les termes s'entredétruire. La dérivée de $(f\varphi)$ est donc nulle, et $(f\varphi)$ est une constante.

Sur ce sujet, il convient de faire quelques observations. D'abord, si l'on veut exprimer la constante $(f\varphi)$ par les coefficients de f et de φ, il suffira de supposer $x = 0$. Soient donc

$$f = a_0x^n + na_1x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}a_2x^{n-2} + \ldots + na_{n-1}x + a_n,$$

$$\varphi = b_0x^n + nb_1x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}b_2x^{n-2} + \ldots + nb_{n-1}x + b_n.$$

On trouve immédiatement

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{1.2.3\ldots n}(f\varphi) &= a_n b_0 - n a_{n-1} b_1 \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{1.2} a_{n-2} b_2 + \ldots + (-1)^n a_0 b_n \end{aligned}\right.$$

Il va de soi que l'on peut envisager la constante $(f\varphi)$ pour deux polynômes de degrés différents; en ce cas, n est le degré le plus élevé.

On peut encore prendre deux polynômes identiques entre eux. Si le degré est impair, la constante (ff) se réduit à zéro; car les termes équidistants des extrêmes se détruisent deux à deux. Mais, si le degré est pair, (ff) n'est généralement pas nul.

Voici une des plus curieuses conséquences de notre proposition. Elle n'a aucun lien avec ce qui va suivre; c'est pourquoi je la joins aux préliminaires.

Soit supposé donné le polynôme f, et considérons comme inconnu le polynôme φ le plus général qui satisfasse à la relation $(f\varphi) = 0$. Il est manifeste qu'on peut composer φ au moyen de n polynômes particuliers φ_1, φ_2, ..., φ_n dont chacun vérifie la relation $(f\varphi_k) = 0$; on aura

$$\varphi = l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2 + \ldots + l_n\varphi_n,$$

les l désignant des constantes arbitraires. Soit a une racine de f; si l'on prend $\varphi = (x-a)^n$, l'expression (1) de $(f\varphi)$ contient le facteur $(x-a)$; donc $(f\varphi)$ est nulle en ce cas. Désignant par a_1, a_2, ..., a_n les racines de f, on aura donc, pour l'expression la plus générale de φ,

$$\varphi = l_1(x-a_1)^n + l_2(x-a_2)^n + \ldots + l_n(x-a_n)^n.$$

Mais la relation $(f\varphi) = 0$ est symétrique en f et φ; on a donc cette conséquence : *Les lettres a, l, α désignant des constantes, soit*

$$l_1(x-a_1)^n + l_2(x-a_2)^n + \ldots + l_n(x-a_n)^n = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n),$$

il existe n constantes λ donnant lieu à la relation semblable

$$\lambda_1(x-\alpha_1)^n+\lambda_2(x-\alpha_2)^n+\ldots+\lambda_n(x-\alpha_n)^n$$
$$=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n).$$

Ce théorème curieux, dû à M. Rosanes, ne pouvait être omis ici. Je vais maintenant faire de la proposition ci-dessus une série d'applications.

I. — Résolution de l'équation du second degré.

Soit f un polynôme du second degré, on a

$$(ff)=2ff''-f'^2,$$

et par suite

$$2ff''=\left[f'+\sqrt{-(ff)}\right]\left[f'-\sqrt{-(ff)}\right].$$

Le polynôme f est ainsi décomposé en facteurs linéaires, et l'équation $f=0$ est résolue par la formule

$$f'=\pm\sqrt{-(ff)}.$$

II. — Élimination entre deux équations du second degré.

Soient f et φ du second degré; envisageons les trois constantes

$$(ff)=2ff''-f'^2,\quad (\varphi\varphi)=2\varphi\varphi''-\varphi'^2,\quad (f\varphi)=f\varphi''-f'\varphi'+f''\varphi.$$

Dans la combinaison $(f\varphi)^2-(ff)(\varphi\varphi)$, le terme $f'^2\varphi'^2$ disparaît; tous les termes qui subsistent contiennent soit f, soit φ. S'il existe donc une valeur de x qui rende nuls à la fois ces deux polynômes, la quantité envisagée sera nulle pour cette valeur de x; étant constante, elle sera toujours nulle. Donc

$$(f\varphi)^2-(ff)(\varphi\varphi)=0$$

est la condition pour que $f = 0$ et $\varphi = 0$ aient une racine commune, ou le résultat de l'élimination de x. En exprimant les constantes par les coefficients suivant (2), on obtient

$$(a_0 b_2 - 2 a_1 b_1 + a_2 b_0)^2 = 4(a_0 a_2 - a_1^2)(b_0 b_2 - b_1^2).$$

III. — Condition pour qu'une équation du troisième degré ait une racine double.

Soit f un polynôme du troisième degré

$$f = a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + 3 a_2 x + a_3.$$

Considérons, en premier lieu, la constante

$$(3) \qquad A = (f'f') = 2 f' f''' - f''^2 = 2^2 . 3^2 (a_0 a_2 - a_1^2).$$

Envisageons maintenant le polynôme φ ainsi défini,

$$\varphi = 2 f'^2 - 3 f f''.$$

Il est seulement du second degré, car sa dérivée seconde est une constante

$$(4) \qquad \varphi' = f' f'' - 3 f f''', \quad \varphi'' = f''^2 - 2 f' f''' = - A \text{ [1]}.$$

Introduisons maintenant la constante $(f'' \varphi')$

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} B = (f'' \varphi') &= f''^3 - 3 f' f'' f''' + 3 f f'''^2 \\ &= 2^2 . 3^3 (2 a_1^3 - 3 a_2 a_1 a_0 + a_3 a_0^2). \end{aligned} \right.$$

Dans la combinaison $B^2 + A^3$ le terme f''^6 disparaît

---

[1] Généralement, f étant un polynôme du $n^{\text{ième}}$ degré,

$$\varphi = (n-1) f'^2 - n f f''$$

est seulement du degré $(2n - 4)$, comme on l'établit habituellement par le théorème des fonctions homogènes. On peut aussi le prouver en considérant la dérivée d'ordre $(2n - 4)$, qui a pour expression

$$-\frac{(2n-4)!}{(n-2)!(n-1)!} [f^{(n-1)} f^{(n-1)}].$$

et tous les termes qui subsistent contiennent l'un des facteurs f ou f'. Suivant donc le même raisonnement qu'au n° II, la constante $B^2 + A^3$ est nulle quand f et f' ont une racine commune. Donc *la condition pour que le polynôme f ait une racine double s'exprime par l'égalité*

$$B^2 + A^3 = 0.$$

Si f contient le facteur $(x - a)^2$, on voit, par l'expression de $\underset{\cdot}{\varphi}$, que le polynôme $\underset{\cdot}{\varphi}$ contient ce même facteur. Donc *la même condition peut aussi s'exprimer par l'égalité* $(\underset{\cdot}{\varphi}\underset{\cdot}{\varphi}) = 0$. Ceci conduit à la relation

$$(\underset{\cdot}{\varphi}\underset{\cdot}{\varphi}) = 2(2f'^2 - 3ff'')(f''^2 - 2f'f''') - (f'f'' - 3ff''')^2 = -\frac{B^2 + A^3}{f'''^2},$$

qui peut aisément être vérifiée. Si l'on met, pour x, la racine de f'', $(\underset{\cdot}{\varphi}\underset{\cdot}{\varphi})$ se réduit à deux termes, B et A chacun à un seul terme, et l'identité des deux membres est alors manifeste. Elle a donc lieu constamment, puisque ces deux membres sont constants.

Cette identité donne un calcul rapide pour la quantité

$$\begin{aligned} R = \frac{B^2 + A^3}{f'''^2} &= -(\underset{\cdot}{\varphi}\underset{\cdot}{\varphi}) = -3f'^2f''^2 + 8f'^3f''' \\ &+ 6ff''^3 - 18ff'f''f''' + 9f^2f'''^2 \\ &= -2^2.3^4(3a_2^2a_1^2 - 4a_3^2a_0 - 4a_3a_1^3 + 6a_3a_2a_1a_0 - a_3^2a_0^2). \end{aligned}$$

L'expression de R permet aisément la distinction des deux cas que peut offrir f au point de vue de la réalité des racines.

Supposons, pour fixer les idées, a_0 positif, par suite f''' positif.

1° Soit $R > 0$. Si l'on met, pour x, une racine de f, R se réduit à $-3f'^2f''^2 + 8f'^3f'''$. Puisque R et f''' sont positifs, nécessairement f' l'est aussi. Donc f ne peut passer par zéro qu'en croissant, donc f n'a qu'une racine réelle.

2° Soit $R < 0$. Nécessairement A est négatif, et, puisque $A = (f'f')$, on voit, par le n° I, que f' a ses racines réelles. Soient a, b les deux racines de f', et $a < b$. Quand $f' = 0$, R se réduit à $6ff''^3 + 9f^2f'''^2$. Puisque R est négatif, f a le signe opposé à celui de f''. Donc f est positive pour $x = a$, négative pour $x = b$. Donc f a trois racines réelles. Donc *f a deux racines imaginaires, une racine double, ou trois racines réelles suivant que R est positif, nul ou négatif.*

Les expressions de A et B conduisent aussi à la conséquence

$$f''^3 + 3Af'' + 2B = 6f'''^2 f. \tag{6}$$

De là résultent la *transformée privée du second terme*

$$f''^3 + 3Af'' + 2B = 0,$$

avec l'inconnue $f'' = 6(a_0 x + a_1)$, et le caractère de réalité des racines rapporté au signe de la quantité $B^2 + A^3$, comme il est d'usage.

IV. — Décomposition d'un polynome du troisième degré en la différence de deux cubes.

Les notations sont ici les mêmes qu'au n° III.

Considérons le polynôme ψ composé ainsi :

$$\psi = 2f'\varphi - 3\varphi' f = 4f'^3 - 9ff'f'' + 9f^2 f'''.$$

Il est seulement du troisième degré ; car $f'\varphi$ et $\varphi' f$ sont tous deux du quatrième degré, mais le terme en x^4 disparaît dans la combinaison ψ. Le polynôme $(\psi^2 - 2\varphi^3)$ est donc du sixième degré : les deux termes f'^6 et ff'^4f'' disparaissant, f^2 est en facteur. Donc ce polynôme ne diffère de f^2 que par un coefficient constant.

Supposant, pour x, une racine de f', on voit $\frac{\psi^2 - 2\varphi^3}{f^2}$ se réduire à $(9ff'')^2 + 2.3^3 ff''^3$. C'est à quoi se réduit aussi $9R$. Ces deux quantités, étant constantes, sont donc toujours égales. De là l'identité

$$\psi^2 - 9Rf^2 = 2\varphi^3.$$

Décomposons le polynôme du second degré φ en facteurs linéaires (n° I), observons l'égalité $(\varphi\varphi) = -R$, et nous aurons

$$(7)\qquad 4\varphi''^3(\psi^2 - 9Rf^2) = (\varphi' + \sqrt{R})^3(\varphi' - \sqrt{R})^3.$$

Tenons compte de l'expression $\varphi'' = -A$ pour en déduire

$$\varphi''^3 = -A^3 = B^2 - f'''^2 R.$$

Observons enfin que, en général, f n'ayant aucune racine commune avec f', les polynômes f et φ, et par suite f et ψ sont premiers entre eux, pour conclure de (7) les deux relations ci-après, où λ est une constante,

$$(8)\qquad \begin{cases} 2(B + f'''\sqrt{R})(\psi + 3f\sqrt{R}) = \lambda(\varphi' \pm \sqrt{R})^3, \\ 2(B - f'''\sqrt{R})(\psi - 3f\sqrt{R}) = \frac{1}{\lambda}(\varphi' \mp \sqrt{R})^3. \end{cases}$$

Il reste à déterminer λ et le signe devant $\sqrt{R}$ dans les seconds membres. D'après la relation

$$R = -(\varphi\varphi) = \varphi'^2 - 2\varphi\varphi'',$$

en supposant x racine de φ, on aura $R = \varphi'^2$. Prenons $\sqrt{R} = \varphi'$. Comme on a alors $\psi = -3\varphi' f$, on voit que $\psi + 3f\sqrt{R}$ s'évanouit. Le signe $\pm$ doit donc être remplacé par le signe $-$. Prenons maintenant la seconde équation (8) et observons que, en supposant toujours x

racine de φ, on a

$$\varphi' + \sqrt{R} = 2\varphi', \quad B = f''\varphi'' - f'''\varphi', \quad B + f'''\sqrt{R} = f''\varphi'',$$
$$B - f'''\sqrt{R} = -\frac{A^3}{f''\varphi''} = \frac{\varphi''^2}{f''}, \quad \psi - 3f\sqrt{R} = -6f\varphi'.$$

Il résulte de là l'expression suivante de la constante λ, en supposant toujours x racine de φ,

$$\frac{1}{\lambda} = -\frac{3}{2}\,\frac{\varphi''^2}{\varphi'^2}\,\frac{f}{f''},$$

qui, d'après l'hypothèse $\varphi = 0$, se transforme en

$$\frac{1}{\lambda} = -\left(\frac{\varphi'' f'}{\varphi' f''}\right)^2.$$

D'ailleurs, on a identiquement

$$(\varphi f') = \varphi f'''' - \varphi' f'' + \varphi'' f' = 0;$$

par conséquent, pour x racine de φ, on a

$$\varphi'' f' = \varphi' f'', \quad \lambda = -1.$$

Les deux identités (8) prennent donc définitivement la forme

$$2(B + f'''\sqrt{R})(\psi + 3f\sqrt{R}) = -(\varphi' - \sqrt{R})^3,$$
$$2(B - f'''\sqrt{R})(\psi - 3f\sqrt{R}) = -(\varphi' + \sqrt{R})^3;$$

d'où l'on tire

$$\psi - 3f\sqrt{R} = \frac{1}{2}\,\frac{B + f'''\sqrt{R}}{A^3}(\varphi' + \sqrt{R})^3,$$
$$\psi + 3f\sqrt{R} = \frac{1}{2}\,\frac{B - f'''\sqrt{R}}{A^3}(\varphi' - \sqrt{R})^3.$$

$$(9) \qquad 12A^3\sqrt{R}f = (B - f'''\sqrt{R})(\varphi' - \sqrt{R})^3 - (B - f'''\sqrt{R})(\varphi' + \sqrt{R})^3.$$

Ainsi est obtenue la décomposition de f en la différence des cubes de deux polynômes du premier degré en x.

On remarquera, en passant, que ψ est, à un facteur constant près, la somme des deux mêmes cubes.

V. — Décomposition d'un polynome du troisième degré en facteurs linéaires.

Les notations étant les mêmes qu'aux n^{os} III et IV, posons

$$(10) \qquad B + f'''\sqrt{R} = \alpha^3, \quad B - f'''\sqrt{R} = \beta^3.$$

Il en résulte

$$\alpha^3\beta^3 = B^2 - f'''^2 R = -A^3.$$

La quantité α^3 a trois racines cubiques α, α', α''. A chacune d'elles adjoignons, dans le même ordre, les racines cubiques β, β', β'' de β^3, par les conditions

$$\alpha\beta = \alpha'\beta' = \alpha''\beta'' = -A.$$

Dénotant par Π le symbole du produit de trois facteurs analogues, obtenus en remplaçant α, β successivement par α', β' et α'', β'', écrivons la formule (9) ainsi :

$$12A^3\sqrt{R}f = -\prod\left[\alpha(\varphi' + \sqrt{R}) - \beta(\varphi' - \sqrt{R})\right]$$
$$= -\prod\left[(\alpha - \beta)\varphi' + (\alpha + \beta)\frac{\alpha^3 - \beta^3}{2f'''}\right].$$

Mettant en dehors $(\alpha - \beta)$ dans chaque facteur, et observant que le produit $(\alpha - \beta)(\alpha' - \beta)(\alpha'' - \beta'')$ est $\alpha^3 - \beta^3$, c'est-à-dire $2f'''\sqrt{R}$, nous avons cette nouvelle forme

$$6A^3 f = -f'''\prod\left[\varphi' - \frac{\alpha^3 + \beta^3}{2f'''} + \frac{\alpha\beta(\alpha + \beta)}{f'''}\right].$$

D'après (10), (4), (3) et (5)

$$\varphi' - \frac{\alpha^3 + \beta^3}{2f'''} = \frac{1}{f'''}(\varphi' f''' - B) = -\frac{Af''}{f'''}.$$

Substituant cette expression dans le produit et mettant aussi $-A$ au lieu de $\alpha\beta$, nous avons enfin

$$6f'''^2 f = \prod (f'' + \alpha + \beta).$$

Telle est finalement la formule de décomposition du polynôme f en facteurs linéaires. Elle se résume ainsi : *Soit* α *une des racines cubiques de* $B + f'''\sqrt{R}$, *et soit* β *celle des racines cubiques de* $B - f'''\sqrt{R}$, *dont le produit par* α *donne* $-A$; *soit* ω *une racine cubique imaginaire de l'unité, on a*

$$(11)\quad 6f'''^2 f = (f'' + \alpha + \beta)(f'' - \omega\alpha + \omega^2\beta)(f'' + \omega^2\alpha + \omega\beta).$$

En égalant à zéro chacun des trois facteurs successivement, on a les trois racines de l'équation $f = 0$ sous la forme de Cardan.

La formule (11) peut, *a posteriori*, être vérifiée aisément. Son second membre est *identiquement* égal à

$$f''^3 + \alpha^3 + \beta^3 - 3\alpha\beta f''.$$

D'après les expressions de α, β, ceci n'est autre que $f''^3 + 2B + 3Af''$ ou $6f'''^2 f$, comme on l'a trouvé déjà (6).

VI. — Condition pour qu'une équation du quatrième degré ait une racine double.

Soit f un polynôme du quatrième degré

$$f = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4.$$

Formons d'abord la combinaison constante

$$I = (ff) = 2ff^{\text{IV}} - 2f'f''' + f''^2 = 48(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2),$$

puis le polynôme du quatrième degré

$$(12)\quad \varphi = 3f'^2 - 4ff''.$$

dont les dérivées sont

$$\varphi' = 2f'f'' - 4ff''', \quad \varphi'' = 2f''^2 - 2f'f''' - 4ff^{\text{IV}},$$
$$\varphi''' = 2f''f''' - 6f'f^{\text{IV}}, \quad \varphi^{\text{IV}} = 2f'''^2 - 4f''f^{\text{IV}} = -2(f''f'').$$

Composons enfin avec f et φ la constante (φf)

$$(13)\left\{\begin{aligned} \mathrm{J} = (\varphi f) &= 9f'^2 f^{\text{IV}} - 12ff''f^{\text{IV}} - 6f'f''f''' + 6ff'''^2 + 2f''^3 \\ &= 2^7.3^3(a_3^2 a_0 - a_4 a_2 a_0 - 2a_3 a_2 a_1 + a_4 a_1^2 + a_2^3). \end{aligned}\right.$$

Si l'on suppose, en même temps, nuls f et f', I se réduit à f''^2, J à $2f''^3$ et $\mathrm{J}^2 - 4\mathrm{I}^3$ à zéro. Donc, suivant un raisonnement déjà employé, *la condition pour l'existence d'une racine double dans l'équation $f = 0$ est*

$$\mathrm{J}^2 - 4\mathrm{I}^3 = 0.$$

VII. — Conditions pour qu'un polynome du quatrième degré soit un carré.

Si f contient un facteur linéaire au carré, ce facteur appartient à f' et se trouve au carré dans φ (12). Si donc f est un carré, les deux polynômes φ et f ne diffèrent que par un facteur constant. Réciproquement tout facteur linéaire commun à f et φ appartient à f' et entre, par suite, dans f avec l'exposant 2 au moins. Donc *la condition nécessaire et suffisante pour que f soit un carré consiste en ce que f et φ ne diffèrent que par un facteur constant.*

Désignant par g un polynôme du second degré, supposons $f = g^2$; nous aurons

$$f = g^2, \quad f' = 2gg', \quad f'' = 2gg'' + 2g'^2,$$
$$\varphi = 4g^2(g'^2 - 2gg'') = -4f(gg).$$

En prenant les dérivées suivantes de f, et formant I, nous trouvons aussi

$$\mathrm{I} = 4(g'^2 - 2gg'')^2 = 4(gg)^2.$$

De là deux expressions de la constante (gg); dans la première nous remplacerons le rapport constant des polynômes φ, f par celui de leurs dérivées quatrièmes :

$$(gg) = -\frac{1}{4}\frac{\varphi^{\text{IV}}}{f^{\text{IV}}} = \frac{1}{2}\sqrt{I}.$$

Il faut observer que $\sqrt{I}$ est ici entièrement déterminée.

D'après les égalités

$$f'' = 2gg'' + 2g'^2, \quad (gg) = 2gg'' - g'^2, \quad f^{\text{IV}} = 6g''^2,$$

on conclut

$$f'' + 2(gg) = 6gg'' = g\sqrt{6f^{\text{IV}}},$$

et *de là résulte cette expression de la racine carrée du polynôme f supposé carré parfait :*

$$(14) \quad g = \sqrt{f} = \frac{1}{\sqrt{6f^{\text{IV}}}}\left(f'' - \frac{\varphi^{\text{IV}}}{2f^{\text{IV}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{6f^{\text{IV}}}}\left[f'' + \frac{(f''f'')}{f^{\text{IV}}}\right].$$

Cette forme algébrique de $\sqrt{f}$ nous sera utile plus loin; elle se vérifie bien aisément *a posteriori* si l'on remplace φ^{IV} par son expression en fonction des coefficients de f. On trouve ainsi

$$\sqrt{f} = \frac{1}{\sqrt{a_0}}\left(a_0x^2 + 2a_1x + 3a_2 - \frac{2a_1^2}{a_0}\right),$$

et le carré de ce polynôme a, pour ses trois premiers termes, $a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2$.

VIII. — Décomposition d'un polynôme du quatrième degré en la différence de deux carrés.

Conservant les mêmes notations qu'au n° VI, introduisons encore le polynôme ψ, du sixième degré,

$$\psi = \varphi f' - f\varphi' = 3f'^3 - 6ff'f'' + 4f^2f'''.$$

La combinaison $3\psi^2 - \varphi^3$ fournit un polynôme du douzième degré, qui contient le facteur f^2. Faisant

$$3\psi^2 - \varphi^3 = 4\chi f^2,$$

on aura un nouveau polynôme χ du quatrième degré

$$\chi = 18f'^3 f''' - 9f'^2 f''^2 - 36ff'f''f''' + 12f^2 f'''^2 + 16ff''^3.$$

En y négligeant les termes contenant f, on voit de suite que $\chi + 3I\varphi$ contient le facteur f et ne diffère ainsi de f que par un coefficient constant. Pour connaître ce facteur, on peut donner à x une valeur particulière, celle d'une racine de f'', par exemple. Le facteur se réduit ainsi à $18f'^2 f^{\text{IV}} + 12ff'''^2$; c'est à quoi se réduit l'expression (13) de $2J$ pour $f'' = 0$. Donc

$$\chi + 3I\varphi = 2Jf$$

et, en conséquence,

$$3\psi^2 = \varphi^3 - 12If^2\varphi - 8Jf^3. \tag{15}$$

Considérons le polynôme du troisième degré

$$F = \xi^3 - 12I\xi - 8J,$$

obtenu en mettant ξ, au lieu de $\frac{\varphi}{f}$, dans le second membre de (15), et décomposons-le en facteurs linéaires d'après le résultat (11) du n° V.

Si nous posons

$$J^2 - 4I^3 = D,$$

$$a^3 = 4(J + \sqrt{D}), \quad b^3 = 4(J - \sqrt{D}), \tag{16}$$

et que nous choisissions la racine cubique de b^3 par la condition

$$ab = 4I, \tag{17}$$

la décomposition de F donne pour résultat

$$F = (\xi + a + b)(\xi + \omega a + \omega^2 b)(\xi + \omega^2 a + \omega b)$$

En conséquence, la formule (15) donne celle-ci

$$(18)\quad \left\{ \begin{aligned} 3\psi^2 = {} & [\varphi + (a+b)f] \\ & \times [\varphi + (\omega a + \omega^2 b)f][\varphi + (\omega^2 a + \omega b)f]. \end{aligned} \right.$$

Les polynômes f et φ n'ayant aucun facteur commun en général, c'est-à-dire si f n'a pas de racine double, on voit que chacun des trois polynômes du second membre de (18) est un carré. Désignant par g, h deux polynômes du second degré, on aura donc

$$\mathrm{G} = \varphi + (\omega a + \omega^2 b)f = g^2, \quad \mathrm{H} = \varphi + (\omega^2 a + \omega b)f = h^2,$$

$$(19)\qquad (\omega - \omega^2)(a - b)f = g^2 - h^2.$$

Par cette dernière formule, f est réduit à la différence de deux carrés. Écrire explicitement les expressions de g, h, c'est ce qu'il reste à faire, et c'est à quoi va servir la formule (14) obtenue au n° VII.

Pour appliquer cette formule, il nous faut calculer deux constantes nouvelles $(\varphi''\varphi'')$ et $(\varphi''f'')$. Le calcul s'abrège si l'on suppose $f'' = 0$, ce qui est permis, et ce que nous rappellerons en employant le signe $\equiv$, au lieu du signe d'égalité,

$$\begin{gathered} (\varphi''\varphi'') \equiv 2\varphi''\varphi^{\mathrm{IV}} - \varphi'''^2 \\ \qquad - 4f^{\mathrm{IV}}(9f'^2 f^{\mathrm{IV}} + 6ff'''^2) + 4f'''^2(2ff^{\mathrm{IV}} - 2f'f'''), \\ (\varphi''\varphi'') = -4\mathrm{J}f^{\mathrm{IV}} + 2\mathrm{I}\varphi^{\mathrm{IV}}, \\ (\varphi''f'') = \varphi''f^{\mathrm{IV}} - \varphi'''f''' - \varphi^{\mathrm{IV}}f'' \equiv -2f^{\mathrm{IV}}(2ff^{\mathrm{IV}} - 2f'f'''), \\ (\varphi''f'') = -2\mathrm{I}f^{\mathrm{IV}}. \end{gathered}$$

En général, si p, q sont deux polynômes du second degré, et λ, μ des constantes, on a

$$(20)\quad (\lambda p + \mu q, \lambda p + \mu q) = \lambda^2(pp) + 2\lambda\mu(pq) + \mu^2(qq).$$

Appliquons cette formule en supposant $p = \varphi''$, $q = f''$, $\lambda = 1$; employons les expressions trouvées pour $(\varphi''\varphi'')$, $(\varphi''f'')$, et aussi $\varphi^{\mathrm{IV}} = -2(f''f'')$, et nous obtiendrons

$$(\mathrm{G}''\mathrm{G}'') = \tfrac{1}{2}(4\mathrm{I} - \mu^2)\varphi^{\mathrm{IV}} - 4(\mathrm{J} + \mu\mathrm{I})f^{\mathrm{IV}},$$

la constante μ devant être remplacée par

$$\mu = \omega a - \omega^2 b.$$

On a, d'après (16) et (17),

$$4\mathrm{I} - \mu^2 = -(\omega^2 a^2 + ab + \omega b^2),$$

$$\begin{aligned} 8(\mathrm{J} + \mu \mathrm{I}) &= a^3 + b^3 + 2ab(\omega a + \omega^2 b) \\ &= (\omega^2 a^2 + ab + \omega b^2)(\omega a + \omega^2 b), \end{aligned}$$

$$(\mathrm{G}''\mathrm{G}'') = -\tfrac{1}{2}(\omega^2 a^2 + ab + \omega b^2)[\varphi^{\mathrm{IV}} + (\omega a + \omega^2 b) f^{\mathrm{IV}}],$$

$$(21) \qquad \frac{(\mathrm{G}''\mathrm{G}'')}{\mathrm{G}^{\mathrm{IV}}} = -\frac{1}{2}(\omega^2 a^2 + ab + \omega b^2).$$

En échangeant ω et ω^2, on a la formule analogue pour H, et finalement, d'après (14),

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} g &= \frac{\varphi'' + (\omega a + \omega^2 b) f'' - \frac{1}{2}(\omega^2 a^2 - ab + \omega b^2)}{\sqrt{6[\varphi^{\mathrm{IV}} - (\omega a + \omega^2 b) f^{\mathrm{IV}}]}}, \\ h &= \frac{\varphi'' + (\omega^2 a + \omega b) f'' - \frac{1}{2}(\omega a^2 + ab + \omega^2 b^2)}{\sqrt{6[\varphi^{\mathrm{IV}} + (\omega^2 a + \omega b) f^{\mathrm{IV}}]}}. \end{aligned} \right.$$

Ainsi sont exprimés explicitement les deux polynômes du second degré, dont la différence des carrés reproduit à un facteur constant près, suivant la formule (19).

IX. — Décomposition d'un polynôme du quatrième degré en facteurs linéaires.

Pour décomposer f en facteurs linéaires, il n'y a qu'à décomposer maintenant les polynômes du second degré $(g - h)$ et $(g + h)$.

En vue de ce calcul, cherchons l'expression de la constante $(\varphi\varphi)$. Supposant, comme précédemment, $f'' = 0$, nous avons

$$\begin{aligned} (\varphi\varphi) &= 2\varphi\varphi^{\mathrm{IV}} - 2\varphi'\varphi''' + \varphi''^2 \\ &= 16 f'^2 f'''^2 - 32 f f' f''' f^{\mathrm{IV}} + 16 f^2 f^{\mathrm{IV}2}, \\ \mathrm{I}^2 &= 4 f'^2 f'''^2 - 8 f f' f''' f^{\mathrm{IV}} + 4 f^2 f^{\mathrm{IV}2}, \\ (\varphi\varphi) &= 4\mathrm{I}^2. \end{aligned}$$

Écrivant, pour abréger,

$$G = \varphi + \mu f, \quad H = \varphi + \mu' f,$$

nous concluons

$$\begin{aligned}(GH) &= (\varphi\varphi) + (\mu + \mu')(\varphi f) + \mu\mu'(ff)\\ &= 4 I^2 - (\mu + \mu')J + \mu\mu' I.\end{aligned}$$

Remplaçant encore les diverses quantités par leurs expressions en a, b, savoir :

$$4I = ab, \qquad 8J = a^3 + b^3,$$
$$\mu = \omega a + \omega^2 b, \qquad \mu' = \omega^2 a + \omega b,$$

nous obtenons

$$(GH) = -\tfrac{1}{8}(\omega^2 a^2 + ab + \omega b^2)(\omega a^2 + ab + \omega^2 b^2).$$

D'après le n° VII et la formule (21), on a

$$(gg) = \frac{1}{2}\,\frac{(G''G'')}{G^{\text{IV}}} = -\frac{1}{4}(\omega^2 a^2 + ab + \omega b^2).$$

De même

$$(hh) = -\tfrac{1}{4}(\omega a^2 + ab + \omega^2 b^2).$$

On peut donc écrire

$$(GH) = -2(gg)(hh).$$

En général, pour deux polynômes quelconques du second degré g, h, on a identiquement, comme on le reconnait par un calcul direct,

$$(g^2 h^2) = 6(gh)^2 - 2(gg)(hh).$$

Comparée à la dernière égalité, celle-ci montre que, pour les polynômes particuliers envisagés ici, on a

$$(gh) = 0.$$

Par conséquent, la relation (20) donne simplement

$$(g - h, g - h) = (g + h, g + h) = (gg) + (hh) = \tfrac{1}{4}(a - b)^2.$$

et, d'après le n° I, en supposant $\varepsilon = \pm 1$,

$$\begin{aligned} &2(g'' - \varepsilon h'')(g + \varepsilon h) \\ &\quad = \left[g' + \varepsilon h' + \frac{i}{2}(a-b)\right]\left[g' + \varepsilon h' - \frac{i}{2}(a-b)\right]. \end{aligned}$$

Ainsi les quatre facteurs linéaires, dont le produit fait f, à une constante près, sont contenus dans la forme

$$g' \pm h' \pm \frac{i}{2}(a-b),$$

où les deux signes ambigus doivent être choisis d'une manière indépendante. Il suffit d'envisager le coefficient de x^4 dans le produit pour déterminer la constante, et l'on a cette formule finale

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} &-\frac{(a-b)^2}{12} f^{\text{IV}} f \\ &\quad = \prod \left[\frac{\varphi''' + (\omega a + \omega^2 b) f'''}{\sqrt{6[\varphi^{\text{IV}} + (\omega a + \omega^2 b) f^{\text{IV}}]}} \right. \\ &\qquad\qquad \left. \pm \frac{\varphi''' + (\omega^2 a + \omega b) f'''}{\sqrt{6[\varphi^{\text{IV}} + (\omega^2 a + \omega b) f^{\text{IV}}]}} \pm \frac{i}{2}(a-b) \right]. \end{aligned} \right.$$

X. — Discussion de l'équation du quatrième degré a coefficients réels.

Supposons réels les coefficients de f, et examinons les facteurs linéaires de ce polynôme pour reconnaître la nature réelle ou imaginaire des racines.

Soient

$$\frac{\varphi''' + (\omega a + \omega^2 b) f'''}{\sqrt{6[\varphi^{\text{IV}} + (\omega a + \omega^2 b) f^{\text{IV}}]}} = u,$$

$$\frac{\varphi''' + (\omega^2 a + \omega b) f'''}{\sqrt{6[\varphi^{\text{IV}} + (\omega^2 a + \omega b) f^{\text{IV}}]}} = v.$$

Supposons d'abord a et b des quantités réelles. Alors u est imaginaire pour x réel, et l'une des déterminations de v est conjuguée de u. Soit v cette détermination. Alors

$u - v \pm \frac{i}{2}(a - b)$ est le produit de i par une quantité réelle, et deux facteurs donnent des racines réelles, tandis que les deux facteurs $u + v \pm \frac{i}{2}(a - b)$ donnent des racines imaginaires. D'après (16), on a cette conclusion :

Si $D = J^2 - 4I^3$ *est positif, l'équation* $f = 0$ *a deux racines réelles et deux imaginaires.*

Dans le cas opposé, celui où D est négatif, a et b, ωa et $\omega^2 b$, $\omega^2 a$ et ωb sont trois couples d'imaginaires conjuguées, en sorte que $a + b$, $\omega a + \omega^2 b$, $\omega^2 a + \omega b$ sont des quantités réelles, ainsi que $i(a - b)$ et les trois constantes

$$\begin{aligned} c_0 &= \varphi^{\text{IV}} + (a + b) f^{\text{IV}}, \\ c_1 &= \varphi^{\text{IV}} + (\omega a + \omega^2 b) f^{\text{IV}}, \\ c_2 &= \varphi^{\text{IV}} + (\omega^2 a + \omega b) f^{\text{IV}}. \end{aligned}$$

D'après (18), le produit de ces trois constantes est positif; c'est, à un facteur numérique près, le carré du coefficient de x^6 dans ψ. Ces constantes sont donc toutes trois positives, ou bien deux négatives et une positive. Dans le premier cas, chaque facteur linéaire de (23) donne une racine réelle; dans le second, une racine imaginaire. La distinction des deux cas se fait par le moyen des deux fonctions symétriques

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 + c_2 &= 3\varphi^{\text{IV}}, \\ c_0 c_1 + c_1 c_2 + c_2 c_0 &= 3[(\varphi^{\text{IV}})^2 - 4I(f^{\text{IV}})^2], \end{aligned}$$

et l'on a cette conclusion :

Si $D = J^2 - 4I^3$ *est négatif, les quatre racines de* f *sont réelles quand les deux quantités*

$$\varphi^{\text{IV}} \quad \text{et} \quad (\varphi^{\text{IV}})^2 - 4I(f^{\text{IV}})^2$$

sont positives; les quatre racines sont imaginaires dans les autres cas.

Ce dernier *criterium* peut être présenté sous une forme différente, qui résulte des deux égalités

$$\varphi^{\text{IV}}[(\varphi^{\text{IV}})^2 - 4\text{I}(f^{\text{IV}})^2] - 8(f^{\text{IV}})^2[\text{I}\varphi^{\text{IV}} - \text{J}f^{\text{IV}}] = \tfrac{2}{25}(\psi^{\text{VI}})^2,$$

$$\text{I}^2[(\varphi^{\text{IV}})^2 - 4\text{I}(f^{\text{IV}})^2] - (\text{I}\varphi^{\text{IV}} - \text{J}f^{\text{IV}})(\text{I}\varphi^{\text{IV}} + \text{J}f^{\text{IV}})$$
$$= (\text{J}^2 - 4\text{I}^3)(f^{\text{IV}})^2.$$

La première, conséquence de (15), montre que $(\varphi^{\text{IV}})^2 - 4\text{I}(f^{\text{IV}})^2$ est positif si φ^{IV} et $\text{I}\varphi^{\text{IV}} - \text{J}f^{\text{IV}}$ sont positifs. La seconde, à cause de la supposition $\text{J}^2 - 4\text{I}^3 < 0$, montre que, si $(\varphi^{\text{IV}})^2 - 4\text{I}(f^{\text{IV}})^2$ est positif, $\text{I}\varphi^{\text{IV}} - \text{J}f^{\text{IV}}$ et $\text{I}\varphi^{\text{IV}} + \text{J}f^{\text{IV}}$ ont un même signe. Ce signe est $+$ si φ^{IV} et I sont positifs. Donc *les deux inégalités*

$$(24) \qquad \varphi^{\text{IV}} > 0, \quad \text{I}\varphi^{\text{IV}} - \text{J}f^{\text{IV}} > 0$$

sont entièrement équivalentes à

$$\varphi^{\text{IV}} > 0, \quad (\varphi^{\text{IV}})^2 - 4\text{I}(f^{\text{IV}})^2 > 0$$

dans le cas supposé $\text{J}^2 - 4\text{I}^3 < 0$.

C'est aux inégalités (24) que conduirait l'application directe du théorème de Sturm.

Rappelons, avec les expressions de I, J (n° VI), celle de φ^{IV}, savoir

$$\varphi^{\text{IV}} = 2^{6}.3^2(a_1^2 - a_0 a_2),$$

d'après laquelle on a

$$\frac{1}{2^{10}.3^3}[(\varphi^{\text{IV}})^2 - 4\text{I}(f^{\text{IV}})^2]$$
$$= 12(a_1^2 - a_0 a_2)^2 - a_0^2(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2).$$

Si $\text{D} = \text{J}^2 - 4\text{I}^3$ *est nul, f a une racine double,* comme on l'a déjà vu (n° VI). Prenant $a = b = \sqrt[3]{4\text{J}} = \pm 2\sqrt{\text{I}}$, on a, par la formule (23), le facteur double sous la forme $\varphi''' - af'''$. Ce facteur peut être triple. Il devient illusoire quand φ et f sont proportionnels : ce cas, où f est un carré, a été examiné au n° VII.