NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L.-A. MONY

Quelques formules générales relatives aux intégrales définies et indéfinies

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 176-183

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__176_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES RELATIVES AUX INTÉGRALES DÉFINIES ET INDÉFINIES;

PAR M. L.-A. MONY.

I. Considérons une fonction $f(u, v, w, \ldots)$ de n quantités u, v, w, ... qui varient simultanément en satisfaisant aux relations (1)

$$(1) \qquad u = \lambda(z), \quad v = \varphi(z), \quad w = \psi(z), \quad \ldots,$$

où z est une variable indépendante. Si l'on donne à z un accroissement dz, u, v, w, ... ont pour différentielles du, dv, dw, ..., et l'on a

$$df(u, v, w, \ldots) = \frac{df}{du}\,du + \frac{df}{dv}\,dv + \frac{df}{dw}\,dw + \ldots.$$

Si l'on intègre entre les limites z_1 et z_2 et si l'on nomme u_1, v_1, w_1, ..., et u_2, v_2, w_2, ..., les valeurs correspondantes de u, v, w, ..., on a

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & f(u_2, v_2, w_2, \ldots) - f(u_1, v_1, w_1, \ldots) \\ & = \int_{u_1}^{u_2} \frac{df}{du}\,du - \int_{v_1}^{v_2} \frac{df}{dv}\,dv - \int_{w_1}^{w_2} \frac{df}{dw}\,dw + \ldots, \end{aligned} \right.$$

en supposant que dans la fonction $\frac{df}{du}$ on a remplacé v, w, ... par leurs valeurs en fonction de u tirées des équations (1), que dans la fonction $\frac{df}{dv}$ on a remplacé u, w, ... par leurs valeurs en fonction de v tirées des équations (1), ... Mais la valeur d'une intégrale définie étant indépendante du nom donné à la variable qui se trouve sous le signe $\int$, on peut remplacer, dans chacune des fonctions $\frac{df}{du}$, $\frac{df}{dv}$, $\frac{df}{dw}$, ..., les variables u, v, w, ..., qui entrent alors isolément dans chacune d'elles, par une même variable x. On a ainsi une relation entre n intégrales définies, qui permet d'obtenir l'une d'elles, lorsque l'on connait les $n - 1$ autres. Les limites u_1, u_2 de l'une des intégrales sont arbitraires, mais leur choix détermine celles des autres intégrales. La connaissance de $n - 1$ de ces intégrales sous forme indéfinie permet d'obtenir la $n^{\text{ième}}$ sous la même forme;

on n'aura en effet qu'à remplacer u_2 par x dans la formule (2), et cette formule donnera

$$\int_{u_1}^{x} \frac{df}{du}\, dx$$

à l'aide des autres intégrales.

Si les relations (1) sont

$$u = z, \quad v = \varphi(z), \quad w = \psi(z), \quad \ldots,$$

ou simplement

$$(3) \qquad v = \varphi(u), \quad w = \psi(u), \quad \ldots,$$

ce qui revient à prendre u comme variable indépendante, la relation (2) devient (4), en désignant par Φ la fonction inverse de φ, Ψ la fonction inverse de ψ, ... :

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & f(u_2, v_2, w_2, \ldots) - f(u_1, v_1, w_1, \ldots) \\ & \quad = \int_{u_1}^{u_2} \frac{df}{du}[x, \varphi(x), \psi(x) \ldots] dx \\ & \quad + \int_{\varphi(u_1)}^{\varphi(u_2)} \frac{df}{dv} \{ \Phi(x), x, \psi[\Phi(x)], \ldots \} dx \\ & \quad + \int_{\psi(u_1)}^{\psi(u_2)} \frac{df}{dw} \{ \Psi(x), \varphi[\Psi(x)], x, \ldots \} dx + \ldots . \end{aligned} \right.$$

Cette formule (4) est notre formule fondamentale; en choisissant convenablement les fonctions f, φ, ψ, ..., elle donne des théorèmes intéressants qui font l'objet de ce travail.

II. Considérons en particulier le cas où il n'entre que deux quantités u et v dans la fonction f.

Posons d'abord $f(u, v) = u \times v$ avec $v = \varphi(u)$.

La formule (4) donne, en y remplaçant u_1 par x_1, u_2 par x_2,

$$(5) \quad x_2\varphi(x_2) - x_1\varphi(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\, dx + \int_{\varphi(x_1)}^{\varphi(x_2)} \Phi(x)\, dx.$$

De la formule (5) on déduit ce théorème important :

Théorème. — *Si l'on connaît l'intégrale définie d'une fonction* $\varphi(x)$ *entre certaines limites* x_1 *et* x_2, *on en déduit l'intégrale définie, entre les limites* $\varphi(x_1)$ *et* $\varphi(x_2)$, *de la fonction inverse* $\Phi(x)$;

Et aussi, en vertu d'une remarque faite plus haut, ce théorème encore plus utile :

Théorème. — *Si l'on connaît l'intégrale indéfinie d'une fonction* $\Phi(x)$, *on en déduit immédiatement celle de la fonction inverse* $\varphi(x)$.

On peut donner de la formule (5) une démonstration géométrique.

Considérons la courbe représentée par l'équation $y=\varphi(x)$ en coordonnées rectangulaires. Soient x_1, y_1 et x_2, y_2 les coordonnées des points M_1 et M_2 de la courbe, P_1 et P_2 les pieds de leurs ordonnées et Q_1 et Q_2 les pieds de leurs abscisses; on a évidemment, si O est l'origine des coordonnées,

$$\begin{aligned}&\text{surface } M_2P_2OQ_2 - \text{surface } M_1P_1OQ_1\\ &\quad= \text{surface } M_1P_1P_2M_2 + \text{surface } M_1Q_1Q_2M_2;\end{aligned}$$

la relation (5) n'est que la traduction analytique de cette égalité.

Dans le cas particulier que nous examinons, la relation (2) prend la forme

$$(6) \qquad u_2v_2 - u_1v_1 = \int_{u_1}^{u_2} v\,du + \int_{v_1}^{v_2} u\,dv;$$

supposons que la relation qui unit u à v soit symétrique, on en tirera

$$u=\varphi(v), \quad v=\varphi(u):$$

les fonctions φ et Φ seront les mêmes; nous aurons alors une relation (6) entre deux intégrales définies ne différant que par leurs limites. On en déduit immédiatement la relation (7) entre des intégrales indéfinies ; désignant par $\mathrm{I}(x)$ l'intégrale indéfinie $\int \varphi(x)\,dx$,

$$\mathrm{I}(x) - \mathrm{I}[\varphi(x)] = x\varphi(x) + \text{const.} \tag{7}$$

Il n'est pas nécessaire pour obtenir des relations analogues à (6) et (7) que les fonctions φ et Φ soient les mêmes, il suffit que, par des changements de variables, des intégrations par parties ou par tout autre procédé, on puisse ramener à une même forme $\int \varphi(x)\,dx$ et $\int \Phi(x)\,dx$, ces intégrales ne différant après cette réduction que par les limites entre lesquelles elles sont prises.

III. Si l'on fait d'autres hypothèses sur la forme de la fonction $f(u, v)$, on obtiendra des formules de transformation analogues aux précédentes, et leur choix plus ou moins heureux donnera des résultats plus ou moins intéressants.

Posons d'abord $f(u, v) = \frac{u}{v}$ avec $v = \varphi(u)$, la formule (4) donne, en y remplaçant u_1 par x_1 et u_2 par x_2, la formule

$$\frac{x_2}{\varphi(x_2)} - \frac{x_1}{\varphi(x_1)} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\varphi(x)} - \int_{\varphi(x_1)}^{\varphi(x_2)} \frac{\Phi(x)}{x^2}\,dx ; \tag{8}$$

et, pour les intégrales indéfinies, la formule

$$\frac{x}{\varphi(x)} - \frac{x_1}{\varphi(x_1)} = \int_{x_1}^{x} \frac{dx}{\varphi(x)} - \int_{\varphi(x_1)}^{\varphi(x)} \frac{\Phi(x)\,dx}{x^2} ; \tag{9}$$

mais la formule (8) peut être écrite sous la forme

$$\frac{\Phi(x_2)}{x_2} - \frac{\Phi(x_1)}{x_1} = \int_{\Phi(x_1)}^{\Phi(x_2)} \frac{dx}{\varphi(x)} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\Phi(x)}{x^2}\,dx ; \tag{10}$$

les deux intégrales $\int \frac{dx}{\varphi(x)}$ et $\int \frac{\Phi(x)}{x^2} dx$ se ramènent donc indifféremment l'une à l'autre.

Posons encore $f(u, v) = \sqrt{u} \times \sqrt{v}$ avec $v = \varphi(u)$, on obtient une formule qui permet de ramener l'une à l'autre les deux intégrales $\int \sqrt{\frac{\varphi(x)}{x}}\, dx$ et $\int \sqrt{\frac{\Phi(x)}{x}}\, dx$.

Posons enfin $f(u, v) = u \times \mathrm{L}v$ avec $v = \varphi(u)$, on obtient une formule qui permet de ramener l'une à l'autre les deux intégrales $\int \mathrm{L}[\varphi(x)]dx$ et $\int \frac{\Phi(x)}{x} dx$.

On peut varier à l'infini les hypothèses sur la forme de la fonction f; chacunè de ces hypothèses donnera naissance à des formules analogues aux précédentes.

On peut aussi combiner entre eux ces divers procédés de transformation, et transformer ainsi une intégrale d'une infinité de manières.

On peut enfin considérer des fonctions f de plus de deux variables, on obtient des relations analogues aux précédentes où entrent plus de deux intégrales.

IV. Revenons à la formule (2) qui nous a servi de point de départ. Dans le cas particulier d'une fonction de deux variables $f(u, v)$, on a

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &f(u_2, v_2) - f(u_1, v_1) \\ &\quad = \int_{u_1}^{u_2} \frac{df}{du}(u, v)du + \int_{v_1}^{v_2} \frac{df}{dv}(u, v)dv. \end{aligned}\right.$$

Supposons que la relation qui unit v à u soit $v = u$; en remplaçant dans (11) u_2 et v_2 par x_2, u_1 et v_1 par x_1, il vient

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &f(x_2, x_2) - f(x_1, x_1) \\ &\quad = \int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{du}(x, x)dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{dv}(x, x)dx. \end{aligned}\right.$$

Donc, si une fonction de la variable x peut être considérée comme la dérivée partielle par rapport à u d'une fonction connue $f(u, v)$, lorsqu'on fait dans cette dérivée partielle $u = v = x$, on obtiendra immédiatement l'intégrale indéfinie ou définie entre certaines limites de la différentielle formée par cette fonction multipliée par dx, si l'on connaît l'intégrale indéfinie ou l'intégrale définie entre les mêmes limites de la différentielle partielle de $f(u, v)$ par rapport à v où l'on fait après la différentiation $u = v = x$.

Ce théorème donne un mode de transformation plus général que celui de l'intégration par parties, qu'il comprend d'ailleurs dans le cas particulier où

$$f(u, v) = \varphi(u) \times \psi(v).$$

Lorsqu'on aura à chercher l'expression d'une intégrale $\int \varphi(x) dx$, il faudra remplacer dans la fonction φ la lettre x, soit par u, soit par v, de telle façon que la fonction que l'on substituera ainsi à $\varphi(x)$ puisse être considérée comme la dérivée partielle par rapport à u d'une fonction connue dont la différentielle partielle par rapport à v, où l'on fera $u = v = x$, sera facile à intégrer.

Les considérations qui précèdent s'étendent facilement à des fonctions de plus de deux variables

$$f(u, v, w, \ldots).$$

On arrive à cette conclusion :

Pour intégrer une différentielle $\varphi(x) dx$, on peut y remplacer la lettre x convenablement par les lettres u, u, w, ..., de telle sorte que cette différentielle soit, après cette substitution, la différentielle partielle par rapport à u d'une fonction connue dont les autres différentielles partielles relatives à v, w, ... soient, lorsqu'on y fait $u = v = w = \ldots = x$, faciles à intégrer.