J.-B. POMEY

Sur les points d'inflexion des courbes du troisième et du quatrième degré

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 169-170

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__169_1>

SUR LES POINTS D'INFLEXION DES COURBES DU TROISIÈME ET DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. J.-B. POMEY.

1. Je suppose qu'une courbe du troisième degré ait un point d'inflexion. En prenant ce point pour origine, l'équation de la courbe sera

$$x^3 + yS = 0, \tag{1}$$

où S désigne un polynôme du second degré.

Les équations $x^3 = 0$ et $y\,S = 0$ sont celles de deux courbes du troisième degré, et la courbe proposée passe par leurs points d'intersection. Cette courbe peut être considérée comme la limite de la courbe

$$x(x-\alpha)(x-\alpha') - yS = 0,$$

lorsque α et α' tendent vers zéro. Si donc l'axe des y coupe S en deux points A et B, la conique a trois points communs en A, ainsi qu'en B, avec la courbe du troisième degré. Elle lui est osculatrice en A et en B. Comme cinq points déterminent une conique, il y a donc cette relation entre les courbures aux points A et B, que la conique tangente en A et osculatrice en B est osculatrice en A. La forme (1) de la courbe reste la même, S variant pourtant, lorsque l'axe des y vient à changer de direction. Si A devient un deuxième point d'inflexion, la conique osculatrice en A doit se décomposer en deux droites, dont l'une est la tangente en A; donc l'autre droite est osculatrice en B, c'est-à-dire que B est lui même un point d'inflexion. Donc deux points d'inflexion, dont l'un est réel, déterminent une droite qui passe par un troisième point d'inflexion.

2. L'équation $F_4 = y^3 P_1 + x Q_3 = 0$, P_1 étant homogène et du premier degré en x et y, Q_3 homogène et du troisième degré en x et y, est l'équation d'une courbe du quatrième degré ayant un point d'inflexion à l'origine. De plus, $Q_3 = 0$ est une courbe du troisième degré qui a sur l'axe des x trois points communs avec $F_4 = 0$ en chacun des trois points où $Q_3 = 0$ coupe $F_4 = 0$. Si deux de ces points sont inflexionnels, le troisième l'est aussi. Donc :

Théorème. — *Si une droite passe par trois points d'inflexion sur une courbe du quatrième degré, elle la coupe encore en un quatrième point d'inflexion.*