NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 143-147

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__143_1>

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Genocchi.

Une lettre de Gauss à Sophie Germain, du 30 avril 1807, publiée par le prince Boncompagni, transcrit une proposition de cette femme illustre sur la forme $y^2 + nz^2$, en ajoutant qu'elle n'est pas vraie dans toute

(1) J'ai donné cette méthode dans mon cours, en 1882, comme application au plan de la *Détermination des sections circulaires* (t. I, 3e série, p. 202). CH. B.

sa généralité, et donne une explication sur les cas dans lesquels elle peut tomber en défaut. Cette explication se fonde sur la théorie de la composition des formes quadratiques binaires, théorie qui, à présent, est trop peu cultivée et trop peu connue. Je crois qu'il serait bon d'appeler l'attention sur une théorie d'un si haut intérêt, et, pour cela, il pourrait être utile de proposer, dans les *Nouvelles Annales*, la question qui a été le sujet des réflexions de Gauss. Je la proposerais dans les termes suivants :

« Sophie Germain a voulu démontrer cette proposition : *Si l'un des facteurs de la formule* $y^2 + nz^2$ (*n étant un nombre premier*) *est de la même forme* $y^2 + nz^2$, *l'autre appartient aussi nécessairement à cette forme*. Mais la démonstration qui s'applique aux formes *indéfinies* ne vaut pas pour les nombres *définis*. A l'égard des nombres définis, la proposition est vraie si le facteur qu'on suppose de la forme $y^2 + nz^2$ est un nombre premier, mais n'est pas généralement vraie si ce facteur est un nombre composé. Ainsi l'on peut trouver trois nombres f, g, h représentés par des formes quadratiques binaires dont le déterminant soit $-n$, et tels que le produit fgh des trois et le produit fg des deux premiers soient de la forme $y^2 + nz^2$, et, au contraire, l'autre facteur h ne soit pas de cette forme. GAUSS. »

Extrait d'une lettre de M. H. Brocard.

M. d'Ocagne a eu raison de dire, au commencement de son Mémoire sur les coordonnées parallèles et axiales (t. III, p. 411), que la courbe (C) qu'il devait étudier au n° 30 (p. 55) donnerait lieu sans doute à de nouvelles remarques. Ce n'est pas la première fois, en effet, que cette courbe a fixé l'attention des géomètres.

Si l'on a égard au mode de génération mécanique signalé (p. 559), la courbe (C) répond à l'énoncé de la question 1029 que j'ai proposée (t. X, 2ᵉ série, p. 240) :

Les extrémités A *et* B *d'une longueur constante* $a = \mathrm{AB}$ *se meuvent sur les côtés d'un angle droit fixe* AOB; *trouver l'enveloppe de la perpendiculaire* AM *à* AB; *calculer la position des points de rebroussement, et mener les tangentes en ces points.*

Dans une solution très élégante (t. XIII, p. 459-460), M. A. Pellissier a donné l'équation de cette courbe qui, en prenant les notations du n° 50, devient

$$(1) \qquad [4a^2 - 3(x^2 + y^2)]^3 = a^2(8a^2 - 9x^2 + 18y^2)^2.$$

Elle admet quatre points de rebroussement, à l'intersection du cercle

$$(2) \qquad x^2 + y^2 = \tfrac{4}{3}a^2$$

avec l'hyperbole concentrique

$$(3) \qquad 18y^2 - 9x^2 + 8a^2 = 0.$$

En ces points, dont les coordonnées sont

$$(4) \qquad x = \pm\frac{4a\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}, \quad y = \pm\frac{2a}{3\sqrt{3}},$$

les tangentes à la courbe sont aussi les tangentes à l'hyperbole, et leur coefficient angulaire est égal à $\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Le point M de contact de la tangente TM avec la courbe (C) peut s'obtenir par la considération du centre instantané de rotation. Il n'y a qu'à achever le rectangle OUIT et à projeter la somme I de ce rectangle en M sur TM.

Cette tangente TM a pour équation

$$y = px - \frac{ap^2}{\sqrt{1+p^2}},$$

p désignant $\frac{dy}{dx}$. C'est donc aussi l'équation différentielle de la courbe (C). On en conclut que le lieu des points D ou la podaire de l'origine a pour équation

$$\rho = a \cos^2 \omega.$$

Cette podaire se compose de deux ovales.

M. Bourguet a montré (t. XIII, 2^e^ série, p. 446) que la courbe (C) est une développante de l'hypocycloïde à quatre rebroussements, enveloppe d'une droite de longueur $2a$ dont les extrémités glissent sur Ox et Oy.

Enfin M. Haton de la Goupillière a complété cette remarque par une intéressante bibliographie de cette hypocycloïde, nommée aussi *cubo-cycloïde* par M. Montucci (t. XIII, 2^e^ série, p. 534-537, et t. XIX, p. 94-96). Les propriétés signalées par M. d'Ocagne (p. 560) pour la quadrature et la rectification de la courbe (C) se rattachent naturellement à ce qui précède.

Ainsi les formules (4) vérifient l'équation de l'hypocycloïde

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}}.$$

D'ailleurs, l'article de M. d'Ocagne renferme les principes de toutes ces remarques.

Désignons, en effet, par N, N' les points où la normale IM rencontre Ox et Oy, et achevons le rectangle ONN'P. Soient G, G' les projections des points O et P sur IM, T étant le milieu de ON, et I le milieu de NN'; on a IN = IN' = TU = a et NN' = $2a$ (p. 558).

Ainsi les axes Ox, Oy déterminent sur la normale en M à la courbe (C) un segment de longueur constante $2a$.

L'enveloppe des normales ou *la développée de* (C) *est donc l'hypocycloïde à quatre rebroussements, lieu des projections* G′ *du point* P *sur les droites constantes* NN′.

En d'autres termes, la courbe (C) est la développante de cette hypocycloïde qui passe par l'origine.

Les géomètres que l'étude de cette hypocycloïde intéresserait pourront consulter aussi les documents suivants : *Nouvelles Annales,* questions 616 (Böklen); 1391 (Laguerre); t. I, p. 176-178, 1862 (Delorme), et p. 315-316 (Beltrami); t. XVII, p. 321-323, 1878 (A. M.); *Atti del Acc. Pont. dei Nuovi Lincei,* t. XXI, p. 6-39, 1877-1878 (Azzarelli); et *Nouvelle Correspondance mathématique,* t. IV, p. 90-91 et 140-141, 1878 (Sidler).