NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Note de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 105-109

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__105_0>

NOTE DE GÉOMÉTRIE;

PAR UN ANCIEN ÉLÈVE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

En 1851, Chasles proposa au Concours général la question suivante :

Étant donnés deux cercles O *et* o *qui ne se touchent pas, mais qui peuvent se couper ou ne pas se couper indifféremment, de chaque point* M *de l'un* O, *on mène deux droites aux centres de similitude* S *et* S' *des deux cercles ; ces droites rencontrent l'autre cercle en quatre points* m, n, m', n'.

On demande de prouver que deux de ces points sont sur un diamètre du cercle o, *et les deux autres sur une droite qui passe par un point fixe, quel que soit le point* M *pris sur le cercle* O.

Malgré les solutions données, cette question ayant été jugée trop difficile, Chasles publia, sans nom d'auteur, une brochure intitulée : *Diverses solutions de la question de Mathématiques élémentaires proposée au Concours général en* 1851. Les solutions renfermées dans cette brochure sont au nombre de dix ; en voici une onzième :

Relativement aux centres de similitude S et S', les points m et n sont les homologues du point M ; par conséquent, les rayons Om, On sont parallèles à OM, et, par suite, mn est un diamètre de O. Il reste à démontrer que les points m' et n', antihomologues de M, appartiennent à une corde qui passe par un point fixe, quel que soit M sur O.

Considérons O et o comme de petits cercles d'une sphère. S et S' sont alors les sommets des deux cônes qui contiennent ces cercles. Le plan SMS' coupe le plan du cercle o suivant la droite $m'n'$. Lorsque M varie de position, le plan SMS' tourne autour de la droite SS', et sa trace sur le plan de o tourne alors autour de la trace de SS' sur ce plan; donc $m'n'$ passe par un point fixe.

Il suffit maintenant de projeter coniquement toute la figure sur un plan arbitraire, les projetantes partant de l'une des extrémités du diamètre de la sphère qui est perpendiculaire au plan de projection [1], pour obtenir l'achèvement de la solution de la question proposée.

Remarques. — La corde $m'n'$ est l'antiparallèle de mn dans l'angle mMn. On peut alors énoncer ainsi la question précédente :

Dans l'angle mMn, *la corde du cercle* o, *antiparallèle du diamètre* mn *qui est parallèle à* OM, *passe par un point fixe, quelle que soit la direction de* OM.

Si le rayon OM est nul, ce théorème se réduit à celui-ci :

Dans l'angle mOn, *la corde du cercle* o, *antiparallèle du diamètre* mn, *passe par un point fixe, quel que soit ce diamètre.*

Comme on vient de le voir et comme on l'a souvent dit, il peut être utile de recourir à une figure de l'espace pour arriver à une solution simple d'une question de Géométrie plane. Voici encore un exemple à l'appui de cette observation :

Construire sur un plan une circonférence tangente à trois circonférences données.

---

[1] Les petits cercles de la sphère se projettent suivant des circonférences. (Voir *Traité de Géométrie* de Rouché et de Comberousse, p. 272 et suiv.)

Prenons d'abord trois circonférences O, O_1, O_2 sur une sphère. Les circonférences O et O_1 appartiennent à deux cônes; appelons s_2 le sommet extérieur à la sphère. De même, pour O_1 et O_2, on a s et, pour O et O_2, on a s_1.

On sait que s, s_1, s_2 sont en ligne droite.

Le plan mené par cette droite tangentiellement aux trois cônes coupe la sphère suivant une circonférence tangente à O, O_1, O_2.

Construisons le point où ce plan touche O_2. Pour cela, menons un plan qui passe par la ligne des sommets et par le point a pris arbitrairement sur O; ce plan coupe le cône de sommet s_2 suivant la génératrice as_2 qui rencontre O_1 au point a_1, antihomologue de a.

On a de même sur la génératrice as_1 le point de O_2 qui est l'antihomologue de a. Enfin, soit a'_2 l'antihomologue de a_1 sur O_2.

Le plan auxiliaire coupe alors le plan de O_2 suivant la droite $a_2 a'_2$. Le point i, où cette droite rencontre la ligne des sommets, est le point de rencontre de cette ligne et du plan de O_2.

Ce point ne change pas lorsqu'on fait varier le plan auxiliaire; la construction précédente donne donc toujours des droites, telles que a_2, a'_2, qui passent par i, lorsque a se déplace sur O.

Parmi ces droites, il y a les tangentes à O_2 issues de i; les points de contact de ces tangentes sont les points où O_2 est touchée par les circonférences suivant lesquelles la sphère est coupée par les plans tangents aux cônes menés par la ligne ss_1s_2.

Je ne reprends pas la recherche des différentes solutions. Projetons maintenant coniquement toute la figure sur un plan arbitraire, les projetantes partant de l'une des extrémités du diamètre de la sphère qui est perpendiculaire au plan de projection. La figure ainsi obtenue sur le plan de projection donne les tracés qui conduisent à la construction d'une circonférence tangente à trois circonférences données.

Dans le cas du plan, il est inutile de construire les sommets s, s_1, s_2 qui sont maintenant des centres de similitude externe.

Des centres o, o_1, o_2 des trois circonférences, on mène des rayons parallèles et de même sens au moyen de ces droites, on construit les points a_1, a_2. antihomologues de a. Puis on construit de même a'_2 antihomologue de a_1.

Au moyen d'un autre point pris sur O, on construit des points α_2, α'_2 analogues à a_2, a'_2.

Les droites $a_2\alpha'_2$, $\alpha_2 a'_2$ se coupent en un point; d'autre part, les droites $a_2\alpha_2$, $a'_2\alpha'_2$ se coupent en un autre point : la droite, qui joint ces.deux points coupe O_2 en des points qui sont les points de contact de O_2 avec deux des circonférences demandées. Ces circonférences touchent O et O_1 en des points qui sont les antihomologues des deux points qui viennent d'être déterminés sur O_2.

De cette solution, il est facile de déduire l'élégante solution que l'on doit à Gergonne.

REMARQUE. — *Les points a, a_1, a_2, a'_2 sont sur une circonférence de cercle. Cette circonférence coupe* O, O_1, O_2 *sous des angles égaux.*

On peut dire alors : *Les cordes communes à O_2 et aux circonférences qui coupent* O, O_1, O_2 *sous des angles égaux passent par un point fixe.*

Sphère tangente à quatre sphères. — Je n'examinerai pas toutes les solutions de ce problème. Je vais simplement dire quelques mots de l'extension de la solution précédente au cas où l'on demande de construire une sphère tangente à quatre sphères.

Appelons (O), (O_1), (O_2), (O_3) les quatre sphères données. Employons les sommets externes des cônes qui les enveloppent deux à deux, soit a un point de (O). Prenons, comme précédemment, les antihomologues a_1, a_2 de a sur (O_1) et (O_2), puis l'antihomologue a'_2 de a_1 sur (O_2).

D'après ce qui précède, a, a_1, a_2, a'_2 sont sur une même circonférence.

Prenons maintenant sur (O_3) les antihomologues b, b_1, b_2, b'_2 de ces quatre points.

Les points a, a_1, b, b_1 sont sur une circonférence de cercle, il en est de même de a_1, a_2, b_1, b_2. Ces deux circonférences sont sur la sphère qui contient a, a_1, a_2, a'_2 et le point b_1. Par suite, comme il est facile de le voir, les quatre points b, b_1, b_2, b'_2 sont sur cette sphère : ils appartiennent alors à une circonférence de cercle. Cette circonférence est l'intersection de (O_3) et d'une sphère qui coupe les quatre sphères données sous des angles égaux.

On voit aisément que, *lorsqu'on déplace a sur* (O), *le plan de cette circonférence passe par une droite fixe, et la polaire de cette droite, par rapport à* (O_3), *rencontre cette sphère aux points où celle-ci est touchée par deux des sphères demandées.*