Nouvelles annales de mathématiques

P. Barbarin

Sur les lignes de courbure du paraboloïde équilatère

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 97-104

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__97_0>

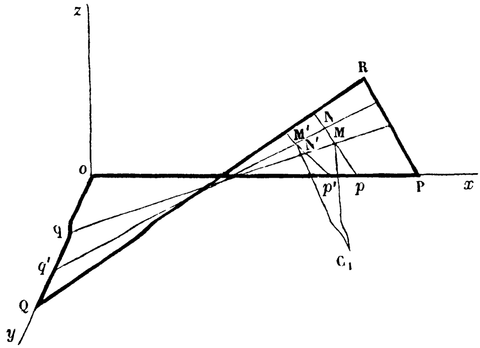
SUR LES LIGNES DE COURBURE DU PARABOLOIDE ÉQUILATÈRE;

PAR M. P. BARBARIN.

I. Les lignes de courbure du paraboloïde hyperbolique équilatère jouissent d'une propriété remarquable. Elles sont aussi sur cette surface le lieu des points pour lesquels la somme ou la différence des distances aux deux génératrices principales est constante.

Soient, en effet, ox. oy ces deux génératrices, qui sont rectangulaires, oz l'axe de la surface, perpendicu-

Fig. 1.



laires à ces droites. Le paraboloïde est complètement déterminé par le quadrilatère gauche oPQR.

Soient M, M′ deux points voisins d'une ligne de courbure; Mp, Mq, M′p', M′q' sont les génératrices passant en ces points; elles forment aussi un quadrilatère gauche MNM′N′. Les normales à la surface en M et M′ se coupent au centre de courbure C_1. C_1M est un des rayons principaux de courbure au point M. On a facilement

$$(1)\qquad \overline{MN}^2 + \overline{M'N'}^2 = \overline{MN'}^2 + \overline{M'N}^2.$$

En appelant ε un infiniment petit par rapport à MN, on peut poser

$$M'N' = MN + \varepsilon$$

et aussi

$$M'N = MN' + \varepsilon',$$

d'où

$$2\,MN \times M'N' = 2\,MN' \times M'N + (\varepsilon'^2 - \varepsilon^2).$$

On peut négliger devant le produit $2\,MN' \times M'N$ la différence $\varepsilon'^2 - \varepsilon^2$ qui est un infiniment petit d'un ordre bien supérieur ; et l'on a simplement

$$2\,MN \times M'N' = 2\,MN' \times M'N. \tag{2}$$

En associant cette relation avec (1), on en déduit

$$MN + M'N' = M'N + MN'$$

et

$$MN - M'N' = M'N - MN',$$

d'où

$$MN = M'N, \quad M'N' = MN';$$

mais, en désignant par η et η' de nouveaux infiniment petits par rapport aux lignes de la figure, on a

$$MN - Mp = M'p' + \eta,$$
$$Mq = MN' + M'q' + \eta',$$

d'où, en ajoutant membre à membre,

$$Mp + Mq = M'p' + M'q' + (\eta + \eta').$$

$\eta + \eta'$ est au moins un infiniment petit du second ordre : il disparaît donc devant les autres quantités qui sont finies, et l'on a rigoureusement

$$Mp + Mq = M'p' + M'q' = \text{const.}$$

On démontrerait par un calcul analogue que

$$Nq' - Np = N'q - N'p' = \text{const.};$$

donc les deux séries de lignes de courbure de la surface sont aussi les deux séries de lignes en tous les points desquelles la somme ou la différence des distances aux génératrices principales est constante.

En un point déterminé M passent deux lignes : l'une, pour laquelle

$$\mathrm{M}p - \mathrm{M}q = \text{const.},$$

a pour tangente la limite de MM'; l'autre, pour laquelle

$$\mathrm{M}q - \mathrm{M}p = \text{const.},$$

a pour tangente la limite de NN'; la figure montre que ces deux tangentes sont rectangulaires, comme on devait s'y attendre, et il résulte des égalités $\mathrm{MN} = \mathrm{M'N}$ et $\mathrm{M'N'} = \mathrm{MN'}$ qu'elles sont bissectrices des angles de Mp et Mq.

II. On peut très aisément vérifier ces propriétés par le calcul. Soit, en effet,

$$z = \frac{xy}{a}$$

l'équation du paraboloïde. Le lieu des points M pour lesquels on a

$$\mathrm{M}p \pm \mathrm{M}q = \text{const.}$$

se détermine par l'équation

$$(3) \qquad \sqrt{y^2 + z^2} \pm \sqrt{x^2 + z^2} = c,$$

d'où l'on tire

$$(4) \qquad y\sqrt{x^2 + a^2} \pm x\sqrt{y^2 + a^2} = ac.$$

Différentions cette dernière, en groupant convenablement les termes, nous pourrons l'écrire

$$\left(\sqrt{x^2 + a^2}\,dy \pm \sqrt{y^2 - a^2}\,dx\right)\left[1 \pm \frac{xy}{\sqrt{(x^2 + a^2)(y^2 + a^2)}}\right] = 0,$$

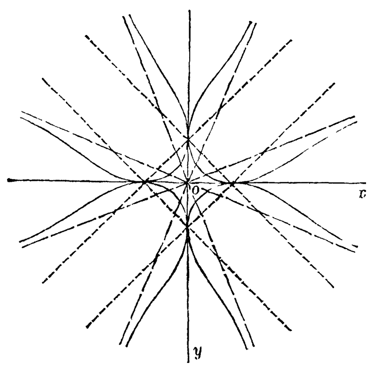
en entendant que les signes supérieurs soient toujours pris simultanément, ainsi que les inférieurs. Aucune valeur réelle de x ou de y n'annule le facteur entre parenthèses; on doit donc avoir

$$(5) \qquad \sqrt{x^2+a^2}\,dy \pm \sqrt{y^2+a^2}\,dx = 0,$$

ce qui est précisément l'équation des lignes de courbure.

L'équation (4) représente les projections sur le plan xoy des deux lignes qui répondent à une même valeur

Fig. 2.



de la constante arbitraire c. Ces deux projections sont réunies dans l'équation entière

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4c^2x^2y^2 + a^2(x+y+c) \\ \qquad \times (x+y-c)(x-y+c)(-x+y+c) = 0, \end{array} \right.$$

facile à discuter par la méthode des régions. La courbe qu'elle représente a deux axes, les bissectrices des angles de ox avec oy, quatre asymptotes,

$$y = \frac{\mp c \pm \sqrt{c^2-a^2}}{a}x,$$

deux à deux symétriques et deux à deux rectangulaires. Enfin elle se compose de quatre branches égales deux à deux, tangentes entre elles et aux axes ox, oy en des points qui sont les sommets du carré de centre o et de rayon c.

Les deux branches comprises dans l'angle xoy et son opposé répondent au signe $+$ dans le premier membre de l'équation (4); les deux autres branches, au signe $-$.

En un point $m(x_1, y_1)$ du plan xoy, il passe deux courbes caractérisées par l'équation (4) : l'une répond à la valeur

$$c_1 = \frac{y_1\sqrt{x_1^2 + a^2} - x_1\sqrt{y_1^2 + a^2}}{a}$$

de la constante, l'autre à la valeur

$$c_2 = \frac{y_1\sqrt{x_1^2 + a^2} - x_1\sqrt{y_1^2 + a^2}}{a};$$

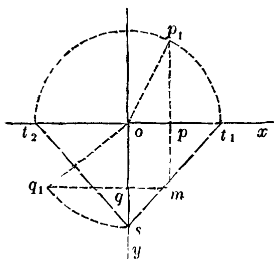
nous désignerons ces courbes par c_1 et c_2.

III. Je vais faire connaître une construction simple des tangentes au point m à ces deux courbes. En effet, on a

$$\frac{dy_1}{dx_1} = + \frac{\sqrt{y_1^2 + a^2}}{\sqrt{x_1^2 + a^2}};$$

il suffit de prolonger mp de $pp_1 = a$ et mq de $qq_1 = a$,

Fig. 3.



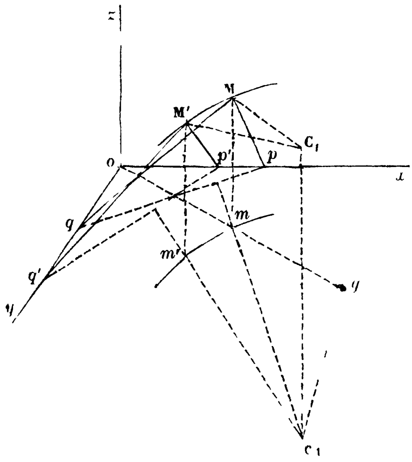
en rabattant oq_1 suivant os sur oy et op_1 suivant ot_1 et ot_2 de part et d'autre sur ox; st_1 est la direction de la tangente en m à la courbe c_1, st_2 est la direction de la tangente en m à la courbe c_2. Il en résulte un moyen de construire sur le paraboloïde les tangentes aux lignes de courbure qui passent en un point donné M de cette surface, car leurs projections sur le plan xoy sont précisément les tangentes en m à c_1 et c_2.

On a vu, du reste, plus haut, que les tangentes au point M sont les bissectrices des angles des génératrices Mp, Mq de ce point; ou encore, si l'on veut, les axes de l'indicatrice, asymptote précisément à ces deux génératrices.

Les deux modes de construction peuvent donc servir de vérification l'un à l'autre. Le second, théoriquement plus simple, exige néanmoins le rabattement du plan Mpq sur xoy, puis son relèvement; et le premier peut quelquefois présenter plus d'avantages.

IV. Par exemple, on peut l'appliquer directement à

Fig. 4.



la construction des rayons de courbure principaux au point M, et par suite de l'indicatrice en ce point.

En effet, les projections des normales MC_1 et $M'C_1$ en deux points infiniment voisins d'une ligne de courbure se font sur le plan xoy suivant les droites mc_1, $m'c_1$ respectivement perpendiculaires à pq, $p'q'$, et dont l'intersection c_1 est la projection du centre de courbure C_1 qu'on se propose de déterminer.

Soient x_1, y_1 les coordonnées du point m, $x_1 + dx_1$, $y_1 + dy_1$ celles de m'. Les équations de mc_1, $m'c_1$ sont

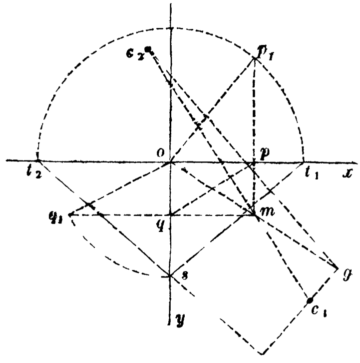
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{x_1}{y_1}, \quad \frac{y - y_1 - dy_1}{x - x_1 - dx_1} = \frac{x_1 + dx_1}{y_1 + dy_1};$$

on en tire, quantités du second ordre omises,

$$\frac{y - 2y_1}{x - 2x_1} = \frac{dx_1}{dy_1}.$$

Cette équation montre que, si l'on prolonge om d'une quantité égale mg, gc_1 est parallèle à la normale menée au point m sur la projection de la deuxième ligne de courbure en M.

Fig. 5.



Soient donc st_1, st_2 les directions des tangentes aux courbes c_1, c_2 du point m; je tire mc_1 perpendiculaire à pq, je prolonge om d'une quantité égale mg, enfin je mène gc_1 perpendiculaire à st_2 et gc_2 perpendiculaire à st_1 ; ces lignes coupent mc_1 en c_1 et c_2.

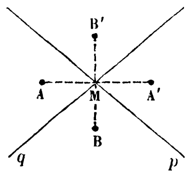
c_1 est la projection du centre principal de courbure C_1 répondant à la première série de lignes de courbure au point M.

c_2 est la projection du second centre de courbure principal C_2.

Les lignes de rappel menées en c_1, c_2 au plan des x, y fixent la position des points C_1, C_2 sur la normale en M au paraboloïde.

Enfin, MA, MB étant bissectrices des angles formés

Fig. 6.



par les génératrices Mp, Mq, du point M, je prends sur la première

$$MA = MA' = K\sqrt{MC_1},$$

sur la seconde

$$MB = MB' = K\sqrt{MC_2};$$

l'indicatrice complète se compose des deux hyperboles ayant Mp, Mq pour asymptotes et leurs sommets en AA', BB'.