Nouvelles annales de mathématiques

N. Ioukovsky

Sur une démonstration nouvelle du théorème de Lambert

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 90-96

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__90_1>

SUR UNE DÉMONSTRATION NOUVELLE DU THÉORÈME DE LAMBERT;

PAR M. N. JOUKOVSKY,
Professeur à l'École Polytechnique de Moscou.

1. Nous proposons ici une démonstration nouvelle du théorème de Lambert, fondée sur la formule de la varia-

tion d'action

(1) $$\delta \int v\,ds = v_2\,\delta\sigma_2 \cos(v_2\,\delta\sigma_2) - v_1\,\delta\sigma_1 \cos(v_1\,\delta\sigma_1),$$

où v_1 et v_2 sont les vitesses d'un point matériel à l'origine et à la fin de la trajectoire AB; $\delta\sigma_1$ et $\delta\sigma_2$ sont les déplacements AA′ et BB′ des points A et B, quand la trajectoire AB se change en une trajectoire infiniment voisine A′B′.

2. La formule (1), donnant la variation de l'action, peut servir aussi à la détermination de la variation du temps de mouvement des planètes, à cause du lemme suivant :

Le temps dans lequel la planete, sollicitée par le Soleil F, *parcourt l'arc elliptique* AB, *est égal à la fraction* $\frac{\mu}{a}$ *multipliée par l'action du mouvement de la planète sur le même arc elliptique* AB, *le Soleil étant transporté du foyer* F *dans l'autre foyer* F_1 *de l'ellipse.*

μ est le coefficient de l'attraction, et $2a$ est le grand axe de l'orbite elliptique.

Le temps t, dans lequel la planète parcourt l'arc AB, est

(2) $$t = \int \frac{ds}{v},$$

où la vitesse v peut être définie comme une fonction d'un rayon vecteur r par rapport au Soleil F :

$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}}.$$

Mais, si le rayon vecteur de la planète par rapport au foyer F_1 est r_1,

(3) $$v = \sqrt{\frac{\mu}{a}}\sqrt{\frac{r_1}{r}};$$

d'où

$$(4) \qquad t = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \int \sqrt{\frac{r}{r_1}}\, ds.$$

Le Soleil étant transporté dans le foyer F_1, la vitesse de la planète se change en

$$(5) \qquad v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{\frac{r}{r_1}}.$$

En y substituant cette valeur de v_1 dans la formule (4), nous avons

$$(6) \qquad t = \frac{\mu}{a} \int v_1\, ds.$$

Le lemme est donc démontré.

3. Revenons à la démonstration du théorème de Lambert :

Le temps dans lequel la planète parcourt l'arc elliptique AB *est une fonction seulement de la corde* $2c$ *de l'arc parcouru, de la somme* 2α *des rayons vecteurs des points* A *et* B *par rapport au Soleil, et du grand axe* $2a$.

Les points A et B étant pris pour les foyers, construisons (*fig.* 1) sur la corde $2c$ deux ellipses confocales dont les grands axes sont

$$\mathrm{CD} = 2\alpha,$$
$$\mathrm{EG} = 4a - 2\alpha.$$

La première de ces ellipses passera par le Soleil parce que

$$(7) \qquad \mathrm{FA} + \mathrm{FB} = 2\alpha,$$

et la seconde passera par l'autre foyer F_1 de l'orbite, parce que, en soustrayant la somme des deux relations

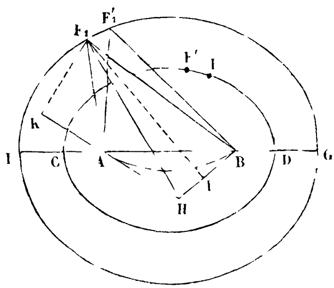
$$(8)\qquad \begin{cases} F_1A - FA = 2a, \\ F_1B + FB = 2a \end{cases}$$

de la formule (7), nous aurons

$$(9)\qquad F_1A + F_1B = 4a - 2\alpha.$$

Supposons que, a et c restant constants, le Soleil soit transporté du point F dans un point infiniment voisin F′ de la même ellipse CD, et cherchons la variation

Fig. 1.



du temps t de passage de la planete du point A au point B. A cause du lemme établi, cette variation est égale à la fraction $\frac{\mu}{a}$ multipliée par la variation de l'action dans le mouvement de la planète du point A jusqu'au point B, subie par la transposition du Soleil du point F_1 dans un point infiniment voisin F'_1 de la même ellipse EG.

Cela posé, nous avons, par la formule (1),

$$(10)\qquad \delta t = \frac{\mu}{a}\left[v_2\,\delta\sigma_2 \cos(\delta\sigma_2\, v_2) - v_1\,\delta\sigma_1 \cos(\delta\sigma_1\, v_1)\right],$$

où $\delta\sigma_1$ et $\delta\sigma_2$ sont les déplacements des points A et B dans le mouvement de translation du triangle AF_1B par lequel le point F'_1 est amené au point F_1, c'est-à-dire

$$\delta\sigma_1, \ \delta\sigma_2, \ F_1F'_1.$$

Soient AH et BH les tangentes de l'orbite elliptique aux points A et B. A cause d'un théorème de Géométrie, la ligne F_1H est la bissectrice de l'angle AF_1B, c'est-a-dire elle est normale à l'ellipse EG; d'où

$$\cos(\delta\sigma_1 v_1) = \sin(AHF_1),$$
$$\cos(\delta\sigma_2 v_2) = \sin(BHF_1).$$

Menons du point F_1 deux perpendiculaires F_1K et F_1L sur les lignes AH et BH, et écrivons, à cause du principe des aires,

$$v_1F_1K = v_2F_1L;$$

d'autre part, on a

$$F_1K = F_1H\sin(AHF_1) = F_1H\cos(\delta\sigma_1 v_1),$$
$$F_1L = F_1H\sin(BHF_1) = F_1H\cos(\delta\sigma_2 v_2),$$

et, par suite,

$$v_1\cos(\delta\sigma_1 v_1) = v_2\cos(\delta\sigma_2 v_2),$$

d'où il vient, par la formule (10),

$$\delta t = 0.$$

Ainsi, a, c, σ restant constants, le temps t ne change pas, c'est-a-dire qu'il dépend seulement de ces variables, ce qu'il s'agissait d'établir.

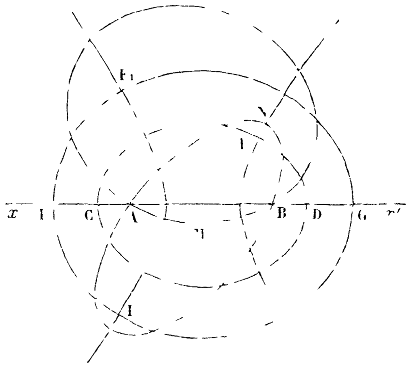
4. Le théorème étant démontré, il est facile de réduire la détermination du temps de mouvement de la planète à la détermination du temps dans le mouvement rectiligne.

En y soustrayant les formules (8), nous recevons

$$FA - FB = F_1B - F_1A.$$

Cette équation montre que les foyers F et F_1 de l'orbite elliptique se trouvent sur la même hyperbole confocale aux ellipses CD et EG. Ainsi (*fig.* 2) à la position donnée du Soleil F et de la corde AB correspondent deux

Fig. 2



orbites elliptiques FF_1 et FF_2. A la limite, pour $a = \infty$, les points F_1 et F_2 s'éloigneront à l'infini, et les ellipses se changeront en des paraboles, ayant les axes parallèles aux asymptotes de l'hyperbole.

Par le théorème de Lambert, nous pouvons transporter le Soleil du point F dans un point D de l'ellipse CD, en y conservant le temps t.

Cela posé, les branches de l'hyperbole doivent se confondre avec les lignes droites Bx' et Ax, et les orbites elliptiques FF_1 et FF_2 avec la ligne droite DE, parce que

$$DE = 2a - \alpha + \alpha = 2a.$$

Le temps t peut être déterminé par la formule (4), en y posant

$$ds = dr,$$

et en prenant

$$(11) \qquad t = \sqrt{\frac{a}{2}} \int_{\alpha - c}^{\alpha + c} \sqrt{\frac{r}{2a - r}}\, dr$$

pour l'arc AMB, et

$$(12)\quad t=\sqrt{\frac{a}{\mu}}\int_0^{\alpha-c}\sqrt{\frac{r}{2a-r}}\,dr+\sqrt{\frac{a}{\mu}}\int_0^{\alpha+c}\sqrt{\frac{r}{2a-r}}\,dr$$

pour l'arc ANB.

De ces formules nous tirons, en intégrant la formule de Lambert,

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} t = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}\Bigg[&\left(\operatorname{arc\,cos}\frac{a-\alpha-c}{a}-\sin\operatorname{arc\,cos}\frac{a-\alpha-c}{a}\right)\\ &\mp\left(\operatorname{arc\,cos}\frac{a-\alpha+c}{a}-\sin\operatorname{arc\,cos}\frac{a-\alpha-c}{a}\right)\Bigg].\end{aligned}\right.$$

Dans le cas où l'orbite est parabolique,

$$\lim\sqrt{\frac{a}{\mu}}\sqrt{\frac{r}{2a-r}}=\sqrt{\frac{r}{2\mu}},$$

et les égalités (11) et (12) donnent la formule d'Euler

$$(14)\qquad t=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\mu}}\left[(\alpha+c)^{\frac{3}{2}}\mp(\alpha-c)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Le signe (—) doit être pris dans ces formules, si le Soleil est en dehors du contour formé par l'arc et la corde AB, et le signe (+) s'il est à l'intérieur de ce contour.

5. La même méthode de raisonnement peut être employée pour la détermination du temps dans le mouvement hyperbolique; seulement, en y transposant le Soleil dans le lemme du n° 2, il faudra changer sa force attractive en répulsive.