NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ERNEST CESÀRO

Algorithme isobarique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 561-579

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__561_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1884, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ALGORITHME ISOBARIQUE;

PAR M. ERNEST CESARO.

1. Depuis longtemps nous avons entrepris l'étude d'un important algorithme, qui comprend comme cas particulier la fonction *aleph* de Wronski ([1]), dont il a été récemment question dans ce Recueil, dans deux articles de M. d'Ocagne. Trois essais, fort incomplets, ont déjà paru dans notre premier *Mémoire d'Arithmétique* dans le *Journal de Battaglini* (1884), et dans les *Nouvelles Annales* (même tome, p. 431).

Nous voulons y joindre un quatrième essai, qui servira à montrer, sous une plus vive lumière, toute l'importance de l'algorithme en question. Une étude complète formera l'objet d'une thèse, qui sera présentée sous peu à la Faculté des Sciences de Rome.

2. Nous appelons *algorithme isobarique* d'une fonction $f(x)$, et nous représentons par

$$\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}} f(x)$$

([1]) Cette fonction a été considérée dans les *Nouvelles Annales* mêmes, 1re série, t. XVI, p. 248 et 416, par MM. Brioschi et Catalan.

la somme de tous les produits, analogues à

$$f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_m),$$

où

$$x_1+x_2+\ldots+x_m=p,$$

en nombres entiers, de toutes les manières possibles, que celles-ci soient ou non *essentiellement distinctes*. Nous appelons *poids* et *degré* de l'algorithme les entiers p et m, respectivement. En particulier,

$$\overset{1}{\underset{p}{\mathrm{S}}}f(x)=f(p),$$

$$\overset{2}{\underset{p}{\mathrm{S}}}f(x)=f(1)f(p-1)+f(2)f(p-2)+\ldots+f(p-1)f(1),$$

. . . .

$$\overset{p-1}{\underset{p}{\mathrm{S}}}f(x)=(p-1)f^{p-2}(1)f(2),\quad \overset{p}{\underset{p}{\mathrm{S}}}f(x)=f^p(1),\quad \ldots\ldots\ldots$$

Nous n'avons pas l'intention d'exposer les propriétés de l'algorithme S, qui sont, d'ailleurs, faciles à établir d'une manière tout à fait élémentaire, ainsi qu'on peut le voir dans notre article *Su talune funzioni isobariche-omogenee,* inséré au *Journal de Battaglini*. Nous nous contenterons de donner quelques formules, propres à montrer comment l'algorithme S trouve de nombreuses et intéressantes applications, dans des questions d'analyse très variées.

3. Soit s_p la *somme des* $p^{\text{ièmes}}$ *puissances* de quantités quelconques $z_1, z_2, \ldots, z_n$, et c_p la *somme des produits* p *à* p des mêmes quantités. Convenons de prendre $c_p=0$, lorsque p est supérieur à n ou inférieur à 1. On sait que, dans son *Arithmétique universelle,* Newton a

donné la formule

$$pc_p = s_1 c_{p-1} - s_2 c_{p-2} + \ldots \mp s_{p-1} c_1 \pm s_p,$$

qui permet de calculer, de proche en proche, les expressions de s_1, s_2, s_3, ..., en fonction des quantités c. Or, par l'algorithme isobarique, on a immédiatement

$$(1) \qquad s_p = \sum_{m=1}^{m=p} \left[(-1)^{p+m} \frac{p}{m} \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m} (c_x) \right].$$

Voulons-nous, par exemple, l'expression de s_4, nous disposerons les calculs comme il suit :

$4 = 4$	1 solut.	$\frac{4}{m} = 4$	$4c_4$	$-$
$1 + 3$	2 »	2	$4c_1c_3$	$+$
$2 + 2$	1 »	2	$2c_2^2$	$+$
$1 + 1 + 2$	3 »	$\frac{4}{3}$	$4c_1^2c_2$	$-$
$1 + 1 + 1 + 1$	1 »	1	c_1^4	$+$

donc

$$s_4 = c_1^4 - 4c_1^2c_2 + 2c_2^2 + 4c_1c_3 - 4c_4.$$

Inversement, on a

$$(2) \qquad c_p = \sum_{m=1}^{m=p} \left[\frac{(-1)^{p+m}}{1.2.3\ldots m} \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m} \left(\frac{s_x}{x}\right) \right].$$

Par exemple,

$$c_4 = \tfrac{1}{24}s_1^4 - \tfrac{1}{4}s_1^2s_2 + \tfrac{1}{8}s_2^2 + \tfrac{1}{3}s_1s_3 - \tfrac{1}{4}s_4.$$

Quelquefois nous aurons besoin de considérer s_p comme la somme des p^{iemes} puissances des racines de l'équation

$$z^n - c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} - \ldots \pm c_n = 0.$$

Si $c_p = (-1)^p$, la relation (1) donne

$$s_p = \sum_{m=1}^{m=p} \left[(-1)^{p+m} \frac{p}{m} \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m} (-1)^x \right] = \sum_{m=1}^{m=p} [(-1)^m C_{p,m}] = -1.$$

Portant cette valeur dans la relation (2), on obtient la formule

$$\sum_{m=1}^{m=p}\left[\frac{1}{1.2.3\ldots m}\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m}\left(\frac{1}{x}\right)\right]=1,$$

donnée par Cauchy dans ses *Exercices d'Analyse* (III, 173).

4. En faisant varier le système des quantités z, les relations (1) et (2) prennent une infinité d'autres formes, plus ou moins intéressantes. En particulier, on peut s'en servir pour déterminer les coefficients des puissances de n, dans l'expression de la *somme* $S_{n,p}$ *des produits* p *à* p *des* n *premiers nombres entiers*. Proposons-nous, par exemple, de chercher, dans cette expression, le terme de plus haut degré. On sait que

$$s_p=\frac{n^{p+1}}{p+1}+\frac{1}{2}n^p+\ldots+B_p n,$$

où B_p est le $p^{\text{ième}}$ des *nombres de Bernoulli,* définis par l'égalité symbolique

$$(3)\qquad (B+1)^p-B^p=p.$$

D'après cela, le terme de plus haut degré, dans $s_{x_1}s_{x_2}\ldots s_{x_m}$, est celui qui contient $n^{(x_1+1)+(x_2+1)+\cdots+(x_m+1)}=n^{p+m}$. On aura un exposant maximum pour $m=p$; mais alors $x_1=x_2=\ldots=x_m=1$, et la formule (2) montre que le terme de plus haut degré, dans $S_{n,p}$, est

$$\frac{(-1)^{2p}}{1.2.3\ldots p}\frac{n^{2p}}{2^p}=\frac{n^{2p}}{2.4.6\ldots 2p}.$$

Quel est le coefficient de n? Puisque s_p ne contient pas de terme indépendant, le terme de degré minimum, dans $s_{x_1}s_{x_2}\ldots s_{x_m}$, est celui qui contient n^m. Il faut donc prendre $m=1$, et l'on voit alors que, dans le second membre de (2), le coefficient de n est $(-1)^{p+1}\frac{B_p}{p}$. Ainsi

$$S_{n,p} = \frac{n^{2p}}{2.4.6\ldots 2p} + \ldots + \frac{(-1)^{p+1}}{p} B_p n.$$

5. Le dernier résultat est d'accord avec l'expression de $S_{n,p}$ que nous avons donnée dans notre premier *Mémoire d'Arithmétique*. On s'assure qu'il est aussi d'accord avec cette autre formule

$$S_{n,p} = A_{1,p} C_{n+1,2p} + A_{2,p} C_{n+2,2p} + \ldots + A_{p,p} C_{n+p,2p},$$

où les nombres A sont faciles à calculer, d'après la loi de formation,

$$A_{m,p} = m A_{m,p-1} + (2p - m) A_{m-1,p-1},$$

et en prenant $A_{m,p} = 0$, lorsque m est inférieur à 1 ou supérieur à p. En particulier,

$$A_{1,p} = 1, \quad A_{p,p} = 1.2.3\ldots p.$$

Les propriétés de ces nombres seront données dans la Thèse annoncée. En voici quelques-unes :

$$A_{1,p} + A_{2,p} + A_{3,p} + \ldots + A_{p,p} = 1.3.5\ldots(2p-1),$$

$$\frac{A_{1,p}}{C_{2p-1,1}} - \frac{A_{2,p}}{C_{2p-1,2}} + \frac{A_{3,p}}{C_{2p-1,3}} - \ldots \pm \frac{A_{p,p}}{C_{2p-1,p}} = \pm 2B_p.$$

Les valeurs des premiers nombres A sont

p	$A_{1,p}$	$A_{2,p}$	$A_{3,p}$	$A_{4,p}$	$A_{5,p}$	$A_{6,p}$	$A_{7,p}$	...
1	1	0	0	0	0	0	0	...
2	1	2	0	0	0	0	0	...
3	1	8	6	0	0	0	0	...
4	1	22	58	24	0	0	0	...
5	1	52	328	444	120	0	0	...
6	1	114	1452	4400	3708	720	0	...
7	1	240	5610	32120	58140	33984	5040	...
.	.	...	....	.....	.....	.....	....	...

Par exemple,

$$S_{n,4} = C_{n+1,8} + 22\,C_{n+2,8} + 58\,C_{n+3,8} + 24\,C_{n+4,8},$$

ou bien, après quelques réductions simples,

$$S_{n,4} = \frac{1}{5760}(n+1)n(n-1)$$
$$\times (n-2)(n-3)(15n^3 - 15n^2 - 10n - 8).$$

6. Soit

$$(4) \qquad e^{M_0+M_1z+M_2z^2+\dots} = N_0 + N_1 z + N_2 z^2 + \dots.$$

Pour plus de simplicité, supposons $N_0 = 1$, et, par suite, $M_0 = 0$. On démontre aisément les relations

$$(5) \qquad N_p = \sum_{m=1}^{m=p} \left[\frac{1}{1.2.3\dots m} \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m} (M_x) \right],$$

$$(6) \qquad M_p = \sum_{m=1}^{m=p} \left[\frac{(-1)^{m+1}}{m} \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m} (N_x) \right].$$

7. Voici une application remarquable des dernières formules. Soit

$$F(z) = f(a) + f(b) + f(c) + \dots,$$

a, b, c, ... étant *tous les diviseurs* de z. On sait que

$$\frac{z\,f(1)}{1-z} + \frac{z^2 f(2)}{1-z^2} + \frac{z^3 f(3)}{1-z^3} + \dots$$
$$= z\,F(1) + z^2\,F(2) + z^3\,F(3) + \dots$$

On en déduit sans peine

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(1-z)^{f(1)}(1-z^2)^{\frac{f(2)}{2}}(1-z^3)^{\frac{f(3)}{3}}\dots \\ &= e^{-zF(1)-\frac{z^2}{2}F(2)-\frac{z^3}{3}F(3)-\dots}. \end{aligned} \right.$$

La formule (5) permet de développer le premier membre suivant les puissances de z. Si $f(z) = z$, on a $F(z) = \int z$, en employant la notation d'Euler ; par suite,

$$M_p = -\frac{1}{p}\int p.$$

D'autre part, d'après une formule d'Euler, on sait que, si p a la forme $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, c'est-à-dire s'il appartient à l'une des séries

$$1,\ 5,\ 12,\ 22,\ 35,\ 51,\ 70,\ \ldots,$$
$$2,\ 7,\ 15,\ 26,\ 40,\ 57,\ 77,\ \ldots,$$

on a $N_p = (-1)^k$. Dans les autres cas, $N_p = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned}&(1-z)(1-z^2)(1-z^3)\ldots\\ &\quad = 1 - z - z^2 + z^5 + z^7 - z^{12} - z^{15} + z^{22} + \ldots.\end{aligned}$$

En laissant aux nombres N leur dernière signification, on a, d'après (6),

$$(8) \qquad \int p = p\sum_{m=1}^{m=p}\left[\frac{(-1)^m}{m}\mathop{\mathrm{S}}_p^m(N_x)\right],$$

expression curieuse de la *somme des diviseurs* de p. Par exemple, on a

$$\int 4 = -4N_4 + 4N_1N_3 + 2N_2^2 - 4N_1^2N_2 + N_1^4,$$

où

$$N_1 = N_2 = -1, \quad N_3 = N_4 = 0.$$

8. On a aussi

$$\begin{aligned}&(1-z)^{-1}(1-z^2)^{-1}(1-z^3)^{-1}\ldots\\ &\quad = \sum_{m=0}^{m=\infty}\psi(m)z^m = e^{z\int 1 + \frac{z^2}{2}\int 2 + \frac{z^3}{3}\int 3 + \ldots},\end{aligned}$$

$\psi(m)$ étant le *nombre des décompositions*, essentiellement différentes, *de m*, *en parties entières, égales ou inégales*. Donc, au lieu de (8), on peut écrire

$$\int p = p\sum_{m=1}^{m=p}\left[\frac{(-1)^{m+1}}{m}\mathop{\mathrm{S}}_p^m\psi(x)\right].$$

En outre, les fonctions $\psi(x)$ et N_x sont liées par les relations isobariques

$$\psi(p)=\sum_{m=1}^{m=p}\left[(-1)^m \overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}(N_x)\right],$$

$$N_p=\sum_{m=1}^{m=p}\left[(-1)^m \overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\psi(x)\right].$$

On peut faire d'importantes applications de l'algorithme S aux séries elliptiques.

9. Soit encore $f(z)=\varphi(z)$, et, par suite, $F(z)=z$. La formule (7) montre que, si l'on pose

$$P(z)=(1-z)^{\varphi(1)}(1-z^2)^{\frac{\varphi(2)}{2}}(1-z^3)^{\frac{\varphi(3)}{3}}\ldots,$$

on a aussi

$$P(z)=e^{-z-z^2-z^3-\ldots}=e^{\frac{z}{z-1}}.$$

On peut se proposer de déterminer les coefficients du développement

$$P(z)=1+N_1 z+N_2 z^2+N_3 z^3+\ldots.$$

Dans le cas actuel, la formule (5) donne

$$N_p=\sum_{m=1}^{m=p}\left[\frac{1}{1.2.3\ldots m}\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}(-1)\right].$$

Or il est clair que $\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}(-1)$ est égale à autant de fois $(-1)^m$ que l'équation $x_1+x_2+\ldots+x_m=p$ admet de solutions *entières et positives;* donc

$$N_p=\sum_{m-1}^{m=p}(-1)^m\frac{C_{p-1,m-1}}{1.2.3\ldots m}=(-1)^p(u-1)^{p-1},$$

pourvu que, après avoir développé le second membre, on y remplace u^m par $\frac{1}{1.2.3\ldots(m+1)}$. En se souvenant des formules fondamentales du *Calcul des différences*, on a finalement

$$N_p = (-1)^p \Delta^{p-1}(u_0).$$

On peut donc écrire, *symboliquement*,

$$(1-z)^{\varphi(1)}(1-z^2)^{\frac{\varphi(2)}{2}}(1-z^3)^{\frac{\varphi(3)}{3}}\ldots = 1 - \frac{z}{1+z\Delta},$$

ce qui veut dire qu'il faut remplacer, dans le second membre développé, Δ^p par la p^{ieme} différence du premier terme de la série

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2.3},\ \frac{1}{2.3.4},\ \frac{1}{2.3.4.5},\ \ldots.$$

10. En vertu des formules (1), (2), (5), (6), si l'on pose $c_p = (-1)^p N_p$, on a $s_p = -pM_p$. En d'autres termes, *si p ne surpasse pas n*, la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation

$$z^n + N_1 z^{n-1} + N_2 z^{n-2} + \ldots + N_n = 0$$

est $-pM_p$. Par exemple, *la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation*

$$z^n - z^{n-1} - z^{n-2} + z^{n-5} + z^{n-7} - z^{n-12} - \ldots = 0$$

est égale à la somme des diviseurs de p. En particulier, les sommes des sept premières puissances des racines de l'équation

$$z^7 - z^6 - z^5 + z^2 + 1 = 0$$

sont 1, 3, 4, 7, 6, 12, 8. De même, *la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation*

$$z^n + \frac{z^{n-1}}{1} + \frac{z^{n-2}}{1.2} + \frac{z^{n-2}}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n} = 0$$

est nulle, pourvu que $1 < p \leqq n$; car, si $N_p = \frac{1}{1.2.3\ldots p}$, dans la formule (4), on sait que

$$M_1 = 1, \quad M_2 = M_3 = \ldots = 0.$$

On trouve, de la même manière, que *la somme des* $p^{\text{ièmes}}$ *puissances des racines de l'équation*

$$z^n + 2z^{n-1} + 3z^{n-2} + 5z^{n-3} + 7z^{n-4} + 10z^{n-5} + \ldots = 0$$

est égale, et de signe contraire, à la somme des diviseurs de p. Il suffit d'observer que, pour $N_p = \psi(p)$, on a $M_p = \frac{1}{p}\int p$.

11. La relation symbolique (3) donne

$$(9) \quad B_p = 1.2.3\ldots p \sum_{m=1}^{m=p} \left\{ (-1)^{p+m} \underset{p}{\overset{m}{S}} \left[\frac{1}{1.2.3\ldots(x+1)} \right] \right\}.$$

Pour le calcul pratique, il est utile de substituer, à cette formule, la suivante :

$$(10) \quad B_{2p} = \frac{1.2.3\ldots2p}{2^{2p-1}} \sum_{m=1}^{m=p} \left\{ (1)^{m+1} - \frac{p}{m} \underset{p}{\overset{m}{S}} \left[\frac{1}{1.2.3\ldots(2x+1)} \right] \right\}.$$

Par exemple, pour $p = 2$,

$$B_4 = \sum_{m=1}^{m=2} \left[(-1)^{m+1} \frac{6}{m} \underset{2}{\overset{m}{S}} f(x) \right],$$

en posant

$$f(x) = \frac{1}{1.2.3\ldots(2x+1)}.$$

Puis,

$$B_4 = 6f(2) - 3f^2(1) = \frac{6}{2.3.4.5} - \frac{3}{2.3.2.3} = -\frac{1}{30},$$

ce qui est exact.

12. La formule (10) montre que l'on peut poser, simultanément,

$$c_p = \frac{(-1)^p}{1.2.3\ldots(2p+1)}, \quad s_p = -\frac{2^{2p-1}B_{2p}}{1.2.3\ldots 2p}.$$

Par conséquent, *la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation*

$$z^n + \frac{z^{n-1}}{1.2.3} + \frac{z^{n-2}}{1.2.3.4.5} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots(2n+1)} = 0$$

est égale à

$$-\frac{2^{2p-1}B_{2p}}{1.2.3\ldots 2p}.$$

Ceci permet aussi de développer en série la fonction y, définie par

$$e^y = 1 + \frac{z^2}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4.5} + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$y = \log\frac{e^z - e^{-z}}{2z}.$$

On a

$$y = \frac{2}{1.2}B_2\frac{z^2}{1} + \frac{2^3}{1.2.3.4}B_4\frac{z^4}{2} + \frac{2^5}{1.2.3.4.5.6}B_6\frac{z^6}{3} + \ldots.$$

Par comparaison, on trouve

$$\int_0^z \left(\frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} - \frac{1}{z}\right)dz = \log\frac{e^z - e^{-z}}{2z},$$

égalité évidente, qui fournit une vérification de nos formules.

13. A chaque relation entre les nombres de Bernoulli correspond une relation isobarique. Ainsi, l'égalité symbolique

$$(B - B)^p = p\,B_{p-1} - (p-1)B_p$$

donne

$$\frac{B_p}{1.2.3\ldots p} = \sum_{m=1}^{m=p}\left[(-1)^{p+m}\frac{p}{m}\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m}\left(\frac{B_x}{1.2.3\ldots x}\right)\right].$$

Voilà une formule digne d'intérêt. Elle montre que la somme des p^{iemes} puissances des racines de l'équation

$$z^n - \frac{B_1}{1} z^{n-1} + \frac{B_2}{1.2} z^{n-2} - \ldots \pm \frac{B_n}{1.2.3\ldots n} = 0$$

est égale à

$$\frac{B_p}{1.2.3\ldots p}.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Il y a une infinité de systèmes de n quantités, jouissant de la propriété que la somme de leurs produits p à p est égale à la somme de leurs puissances $p^{\text{ièmes}}$, pour $p = 1, 2, 3, \ldots, n$. Chaque système est constitué par les racines de l'équation

$$z^n - \frac{B_1}{1} \lambda z^{n-1} + \frac{B_2}{1.2} \lambda^2 z^{n-2} - \ldots \pm \frac{B_n}{1.2.3\ldots n} \lambda^n = 0,$$

dans laquelle on attribue à λ une valeur particulière, arbitraire.

Par exemple, pour $n = 3$, on a les quantités

$$0, \quad \frac{\lambda}{12}(3 - \sqrt{-3}), \quad \frac{\lambda}{12}(3 + \sqrt{-3}).$$

On arrive directement au même résultat, en mettant la *formule de Newton* sous la forme symbolique

$$(\gamma - \sigma)^p + (p - 1)\gamma_p = 0,$$

après avoir posé

$$c_p = \frac{\gamma_p}{1.2.3\ldots p}, \quad s_p = \frac{\sigma_p}{1.2.3\ldots p}.$$

Il suffit d'observer que les nombres de Bernoulli satisfont à la relation symbolique

$$(B - B)^p + (p - 1)B_p = 0,$$

et que, par conséquent, pour satisfaire à la formule de

Newton, de manière que $\gamma = \sigma$, on doit prendre

$$\gamma = \sigma = \lambda B.$$

14. On peut développer en série la fonction y, définie par l'égalité

$$e^y = 1 + \frac{B_1}{1} z + \frac{B_2}{1.2} z^2 + \frac{B_3}{1.2.3} z^3 + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$y = \log \frac{z e^z}{e^z - 1}.$$

On a

$$y = \frac{B_1}{1} z - \frac{B_2}{1.2} \frac{z^2}{2} + \frac{B_3}{1.2.3} \frac{z^3}{3} - \ldots,$$

et l'on en déduit l'égalité évidente

$$\int_0^z \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{e^z - 1} \right) dz = \log \frac{z e^z}{e^z - 1},$$

nouvelle vérification de nos calculs.

15. Des calculs analogues peuvent être établis pour tout système de nombres, défini par une relation *récurrente*, et, en particulier, pour les *nombres d'Euler*, définis par l'égalité symbolique

$$(11) \qquad (E + 1)^p + (E - 1)^p = 0.$$

Pour le calcul immédiat de ces nombres, on a la formule isobarique

$$(12) \qquad E_{2p} = 1.2.3\ldots 2p \sum_{m=1}^{m=p} \left[(-1)^m \underset{p}{\overset{m}{\mathrm{S}}} \left(\frac{1}{1.2.3\ldots 2x} \right) \right].$$

On sait, d'ailleurs, que $E_{2p-1} = 0$.

16. Ce que nous avons dit sur les sommes des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de certaines équations ne cesse d'être vrai lorsque le degré de l'équation augmente indéfiniment. Par exemple, si l'on considère l'équation

$$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)\ldots=0,$$

on peut affirmer que la somme des diviseurs de p est égale à la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances de toutes les racines de l'unité. Ce résultat est évident : il exprime une simple identité. On sait, en effet, que la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité est o, *sauf lorsque m divise p*; dans ce cas, elle est m. Cela résulte aussi de la formule (1). Autre exemple, bien remarquable. La formule (10) a été obtenue en considérant, au lieu de l'égalité (3), cette autre égalité symbolique

$$(2B+1)^{2p+1}=4p+2,$$

cas particulier de la relation

$$(2B+1)^p=2p+(2-2^p)B_p;$$

et en observant que $B_p=0$, pour p impair, excepté B_1, qui est $\frac{1}{2}$. Cela étant, la comparaison avec la *formule de Newton* montre qu'on peut poser, simultanément,

$$c_p=\frac{(-1)^p}{1.2.3\ldots(2p+1)},\quad s_p=-\frac{2^{2p-1}B_{2p}}{1.2.3\ldots2p}.$$

Lorsque n augmente indéfiniment, aux racines de l'équation

$$z^n+\frac{z^{n-1}}{1.2.3}+\frac{z^{n-2}}{1.2.3.4.5}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots(2n+1)}=0$$

il faut substituer les racines de

$$\sqrt{z}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{z}}}-e^{-\frac{1}{\sqrt{z}}}\right)=0,$$

c'est-à-dire

$$-\frac{\pi^2}{1},\ -\frac{\pi^2}{4},\ -\frac{\pi^2}{9},\ -\frac{\pi^2}{16},\ \ldots.$$

Or on voit directement que

$$s_p=(-1)^p\pi^{2p}\left(1+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{9^p}+\frac{1}{16^p}+\ldots\right).$$

On obtient ainsi l'importante formule

$$1 + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \frac{1}{4^{2p}} + \ldots = (-1)^{p+1} \frac{2^{2p-1} B_{2p}}{1.2.3\ldots 2p} \pi^{2p},$$

qu'on démontre ordinairement, soit dans l'ancienne, soit dans la nouvelle théorie des *nombres de Bernoulli,* au moyen d'intégrales définies, tandis que nous n'avons eu besoin que de considérations *absolument élémentaires*. Actuellement, nous cherchons à établir, sur ces bases élémentaires, une méthode générale, pour la recherche des sommes analogues à celle qui vient d'être déterminée.

17. Enfin, montrons comment le calcul isobarique peut être utile dans l'étude des *séries récurrentes*. Soit $u_1, u_2, u_3, \ldots$ une telle série, *définie* par la relation

$$(13) \qquad u_n = A_1 u_{n-1} + A_2 u_{n-2} + \ldots + A_n u_0.$$

En prenant $u_0 = 1$, tous les termes sont déterminés, et l'on trouve, de proche en proche,

$$u_1 = A_1, \quad u_2 = A_1^2 + A_2, \quad u_3 = A_1^3 + 2 A_1 A_2 + A_3, \quad \ldots,$$

en général

$$(14) \qquad u_p = \sum_{m=1}^{m=p} \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m} (A_x).$$

Inversement,

$$A_p = \sum_{m=1}^{m=p} \left[(-1)^{m+1} \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m} (u_x) \right].$$

Par la comparaison de cette formule avec (12), on voit qu'on peut poser, simultanément,

$$u_p = \frac{1}{1.2.3\ldots 2p}, \quad A_p = -\frac{E_{2p}}{1.2.3\ldots 2p}.$$

Cela tient à ce que l'égalité de définition (11) peut être mise sous la forme (13). Même observation pour les *nombres de Bernoulli*. Au moyen de (14) on peut donc *inverser* les relations (9) et (12). Par exemple, on obtient

$$\frac{1}{1.2.3\ldots 2p} = -\sum_{m=1}^{m=p} \underset{p}{\overset{m}{\mathrm{S}}}\left(\frac{\mathrm{E}_{2x}}{1.2.3\ldots 2x}\right).$$

18. On a des cas particuliers remarquables, lorsque

$$\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_2 = \ldots = \mathrm{A}_k = 1, \quad \mathrm{A}_{k+1} = \mathrm{A}_{k+2} = \ldots = 0.$$

D'après (14), u_p représente alors le *nombre des décompositions de p en parties entières et positives, non supérieures à k*. Pour $k = 2$, on obtient la *série de Fibonacci*

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots.$$

dont le $p^{\text{ième}}$ terme représente donc le *nombre des décompositions de p en parties égales à* 1 *ou à* 2. Ainsi l'on a $4 = 2 + 2 = 1 + 1 + 2 = 1 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$. Le nombre de ces décompositions est $u_4 = 5$.

19. Dans certaines questions, qui sont en rapport plus direct avec l'algorithme étudié par M. d'Ocagne, il est préférable de considérer un autre algorithme $\sigma_p^m f(x)$, pour lequel on doit prendre toutes les solutions entières, *non négatives,* de l'équation

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = p.$$

En sous-entendant l'indice p, on trouve aisément les relations symboliques

$$1 + \sigma^m = (1 + \mathrm{S})^m, \quad 1 + (-\mathrm{S})^m = (1 - \sigma)^m.$$

On voit sans peine que le coefficient de z^p, dans

$$(1 + \mathrm{A}_1 z + \mathrm{A}_2 z^2 + \mathrm{A}_3 z^3 + \ldots)^m,$$

est $\sigma_p^m(\mathrm{A}_x)$. Par exemple, si $\mathrm{A}_p = 1$, $\sigma_p^m(1)$ représente le nombre des solutions entières, non négatives, de l'équation $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = p$, de sorte que

$$\sigma_p^m(1) = C_{m+p-1,p}\,;$$

par suite,

$$\begin{aligned}(1 + z + z^2 + z^3 + \ldots)^m \\ = 1 + C_{m,1}z + C_{m+1,2}z^2 + C_{m+2,3}z^3 + \ldots.\end{aligned}$$

De même, la comparaison des développements de e^z, e^{mz} donne la forme connue

$$\frac{m^p}{1.2.3\ldots p} = \sigma_p^m\left(\frac{1}{1.2.3\ldots x}\right).$$

Ces résultats sont évidents; mais on remarquera que l'algorithme σ en facilite singulièrement la recherche. Il peut, d'ailleurs, dans certains cas, conduire à des conséquences plus importantes : nous l'appliquerons aux séries elliptiques, en relation avec l'analyse indéterminée du second degré.

20. Voici quelques autres formules, dont le lecteur trouvera facilement la démonstration :

a. La somme des produits p à p des n premiers nombres entiers est donnée, au moyen de l'algorithme σ, par la relation

$$S_{n,p} = (n+1)n\ldots(n-p+2)\sigma_p^{n-p+1}\left(\frac{1}{x+1}\right).$$

b. Les nombres de Bernoulli, *pris de quatre en quatre,* satisfont à la relation

$$-\frac{p}{2} = C_{4p+2,4}B_4 - C_{4p+2,8}\,4B_8 - C_{4p+2,12}\,4^2B_{12} - \ldots.$$

c. Les mêmes nombres sont donnés par la formule isobarique

$$\begin{aligned}B_{4p} = 1.2.3\ldots 4p\,\frac{(-1)^{p+1}p}{2^{2p-1}} \\ \times \sum_{m=1}^{m=p}\left\{\frac{(-2)^m}{m}\,\mathop{\mathrm{S}}_p^m\left[\frac{1}{1.2.3\ldots(4x+2)}\right]\right\}.\end{aligned}$$

d. Les nombres de Bernoulli, *pris de huit en huit,* satisfont à la relation

$$-\frac{p}{2}u_{p+1} = C_{8p+4,8}B_8 u_p - C_{8p+4,16}B_{16}4u_{p-1} + C_{8p+4,24}B_{24}4^2u_{p-2} - \ldots,$$

où les nombres u sont donnés par la loi de récurrence

$$u_n = 34u_{n-1} - u_{n-2},$$

avec les conditions initiales $u_1 = 1$, $u_2 = 33$. On trouve, de proche en proche,

$$u_3 = 1121,\quad u_4 = 38113,\quad u_5 = 1294721,\quad u_6 = 42725793,\quad \ldots.$$

e. Les nombres de Bernoulli, dont l'indice est divisible par 8, sont donnés par la formule

$$B_{8p} = 1.2.3\ldots8p\,\frac{(-1)^{p+1}p}{2^{2p-1}}\times\sum_{m=1}^{m=p}\left\{\frac{(-24)^m}{m}\,\mathop{S}_{p}^{m}\left[\frac{u_{x+1}}{1.2.3\ldots(8x+4)}\right]\right\}.$$

Proposons-nous, par exemple, de calculer B_{16}. Nous obtenons

$$B_{16} = -\frac{1.2\ldots16}{4}\left[24\frac{1121}{1.2\ldots20} - \frac{24^2}{2}\frac{33^2}{(1.2\ldots12)^2}\right].$$

Les simplifications, faciles et nombreuses, amènent immédiatement le résultat

$$B_{16} = \frac{59}{3.17.20} - \frac{11.13}{20} = -\frac{3617}{510}.$$

21. Dans un autre article, nous montrerons les liaisons de l'algorithme isobarique avec la fonction de Wronski, et nous en étendrons la signification, en supprimant la condition que les quantités x, dont la somme est p, soient entières, et en supposant p quelconque. En outre, nous généraliserons l'idée d'algorithme isobarique en remplaçant la condition $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = p$ par une autre condition quelconque.