NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE D'OCAGNE

# Étude de deux systèmes simples de coordonnées tangentielles dans le plan : coordonnées parallèles et coordonnées axiales

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 3 (1884), p. 545-561

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__545_0>

# ÉTUDE DE DEUX SYSTÈMES SIMPLES DE COORDONNÉES TANGENTIELLES DANS LE PLAN : COORDONNÉES PARALLÈLES ET COORDONNÉES AXIALES

(voir p. 516);

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève-Ingénieur des Ponts et Chaussées.

## COORDONNÉES AXIALES (1).

### VI. — FORMULES FONDAMENTALES.

38. *Définition.* — On se donne une droite $Ox$, *axe* du système, et sur cette droite, un point O, *pôle* du système. Une droite est déterminée par l'angle $\theta$ qu'elle fait avec $Ox$ et la distance $\lambda$ de son point d'intersection avec $Ox$ au point O. Les coordonnées $\lambda$ et $\theta$ portent, bien entendu, leur signe.

Toute relation entre $\lambda$ et $\theta$ définit alors une courbe par ses tangentes ; elle est l'équation de cette courbe.

39. *Transformation des coordonnées.*

1° On change de pôle, en conservant le même axe. Dans ces conditions, $\theta$ reste le même ; si $\lambda_1$ est la nouvelle valeur de la coordonnée linéaire et si $a$ est la distance, prise avec son signe, du nouveau pôle à l'ancien, on a

$$\lambda = \lambda_1 + \alpha. \tag{1}$$

(1) Un système tout à fait analogue a été étudié par M. H.-J. PURKISS : *Notes on pedal coordinates* (*The Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics*, vol. III, p. 83 : 1866). CH. B.

A la suite d'une Communication orale que je fis sur ce sujet à la *Société mathématique*, un membre de la Société me dit que ce système avait été aussi proposé par M. l'abbé Aoust. M. O.

2° On change d'axe, en conservant le même pôle. Si $\omega$ est l'angle du nouvel axe avec l'ancien, on a

$$(2)\qquad \theta = \theta_1 + \omega$$

et

$$\lambda \sin\theta = \lambda_1 \sin\theta_1;$$

d'où

$$\lambda = \frac{\lambda_1 \sin\theta_1}{\sin(\theta_1 + \omega)}.$$

3° On transporte l'axe parallèlement à lui-même, le pôle restant sur une perpendiculaire à la direction de cet axe. Alors, $\theta$ reste le même, et l'on a

$$(3)\qquad \lambda = \lambda_1 - h \cot\theta,$$

$h$ étant la distance du nouvel axe à l'ancien.

Toute transformation peut, par décomposition, se ramener aux trois précédentes.

40. *Passage aux coordonnées parallèles.* — Prenons pour origines des coordonnées parallèles deux points de l'axe $Ox$ équidistants du pôle O et pour axes des $u$ et des $v$ les perpendiculaires élevées par ces points à la droite $Ox$. Nous aurons, en appelant $\delta$ la distance commune des nouvelles origines au point O,

$$\tang\theta = \frac{v-u}{2\delta} = -\frac{u+v}{2\lambda}.$$

Pour passer des coordonnées axiales aux coordonnées parallèles, les formules seront donc

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \tang\theta &= \frac{v-u}{2\delta}, \\ \lambda &= \delta\frac{u+v}{u-v}. \end{aligned}\right.$$

Pour le passage inverse,

$$(4')\qquad \left\{\begin{aligned} u &= (\delta - \lambda)\tang\theta, \\ v &= -(\delta + \lambda)\tang\theta. \end{aligned}\right.$$

41. *Relation avec les coordonnées ordinaires.* — Étant donnée l'équation en $x$ et $y$ d'une courbe, on formera très simplement l'équation en $\lambda$ et $\theta$ de cette courbe rapportée à l'ancien axe des $x$ pris pour axe des $\lambda$ et à l'ancienne origine prise pour pôle, en prenant l'équation de la tangente à la courbe en fonction de son coefficient angulaire $m$, et remplaçant dans cette équation $y$ par zéro, $x$ par $\lambda$ et $m$ par $\operatorname{tang}\theta$.

42. *Équations de courbes usuelles.* — Ces équations se déduisent des équations correspondantes en $x$ et $y$ par le procédé qui vient d'être indiqué; les deux premières sont très aisées à obtenir directement.

*Point,*

$$\lambda = a - b\cot\theta,$$

$a$ et $b$ étant les coordonnées rectangulaires de ce point.

*Cercle,*

$$(\lambda - a)\sin\theta + b\cos\theta - R = 0,$$

$a$ et $b$ étant les coordonnées rectangulaires du centre et R le rayon. Si le cercle est tangent à $Ox$, c'est-à-dire si $b = R$, l'équation peut s'écrire

$$\lambda = a + R\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}.$$

*Ellipse* rapportée à son axe focal et à son centre,

$$\lambda^2 = a^2 + b^2\cot^2\theta,$$

$a$ et $b$ étant les demi-axes de la courbe.

*Hyperbole,*

$$\lambda^2 = a^2 - b^2\cot^2\theta.$$

*Parabole* rapportée à son axe et à son sommet,

$$\lambda + \frac{p}{2}\cot^2\theta = 0,$$

$p$ étant le paramètre de la courbe.

43. *Équation générale des coniques.* — Prenons l'équation générale des coniques en coordonnées parallèles

$$A u^2 + 2 B uv + C v^2 + 2 D u + 2 E v + F = 0,$$

et opérons la transformation indiquée au n° 40; il vient pour l'équation en $\lambda$ et $\theta$ correspondante

$$\begin{aligned}[(A + 2B + C)\lambda^2 \\ + 2(C - A)\delta\lambda + (A - 2B + C)\delta^2]\,\mathrm{tang}^2\theta \\ - 2[(D + E)\lambda - (D - E)\delta]\,\mathrm{tang}\,\theta + F = 0.\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} a &= A + 2B + C, & d &= -(D + E), \\ b &= (C - A)\delta, & e &= (D - E)\delta, \\ c &= (A - 2B + C)\delta^2, & f &= F. \end{aligned}$$

L'équation devient

$$(a\lambda^2 + 2b\lambda + c)\,\mathrm{tang}^2\theta + (2d\lambda + 2e)\,\mathrm{tang}\,\theta + f = 0.$$

Ainsi donc, étant donnée une conique, on obtient, pour son équation en $\lambda$ et $\theta$, une expression, égalée à 0, qui contient un terme en $\mathrm{tang}^2\theta$ dont le coefficient est un trinôme du deuxième degré en $\lambda$, un terme en $\mathrm{tang}\,\theta$ dont le coefficient est un binôme du premier degré en $\lambda$, et un terme constant.

Réciproquement, toute équation de cette forme représente une conique, car les six équations précédentes permettent, lorsqu'on se donne arbitrairement $\delta$, de déterminer A, B, C, D, E, F, en fonction de $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$. On trouve

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{\delta} + \frac{c}{2\delta^2}\right), & D &= \frac{1}{2}\left(\frac{e}{\delta} - d\right), \\ B &= \frac{1}{4}\left(a - \frac{c}{\delta^2}\right), & E &= -\frac{1}{2}\left(d + \frac{e}{\delta}\right), \\ C &= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{\delta} + \frac{c}{2\delta^2}\right), & F &= f. \end{aligned}$$

Remarquons que, si $a = A + 2B + C = 0$, la courbe est une parabole.

Pour reconnaître la nature de la courbe, formons (n° 25) la quantité

$$\mu = (A + 2B + C)[AE^2 - 2BDE + CD^2 + F(B^2 - AC)];$$

on trouve

$$\mu = \frac{a}{64\delta^2}[ae^2 - 2bde + cd^2 + f(b^2 - ac)].$$

On peut toujours faire en sorte que $a$ soit $> 0$; il suffit donc de considérer le signe de

$$\Delta = ae^2 - 2bde + cd^2 + f(b^2 - ac);$$

c'est le discriminant de la forme obtenue en remplaçant, dans l'équation axiale de la conique, $\lambda \tang\theta$ par $x$ et $\tang\theta$ par $y$, et l'on a

$$\begin{array}{ll} \Delta > 0 & \text{hyperbole,} \\ \Delta < 0 & \text{ellipse.} \end{array}$$

Si $\Delta = 0$, on a un système de deux points.

Pour déterminer le centre, les axes, etc., il suffit de prendre les équations trouvées en coordonnées parallèles, et d'y remplacer $u$ et $v$ par leurs valeurs en fonction de $\lambda$ et $\theta$, et les coefficients A, B, ... par leurs valeurs en fonction de $a$, $b$, ....

## VII. — Étude générale des courbes.

44. *Détermination des points d'une courbe, répondant aux diverses tangentes.* — Si M est le point de contact d'une tangente MT (*fig.* 8) qui coupe $Ox$ au point T, et si MT' est la tangente infiniment voisine, on a, dans le triangle infinitésimal MTT',

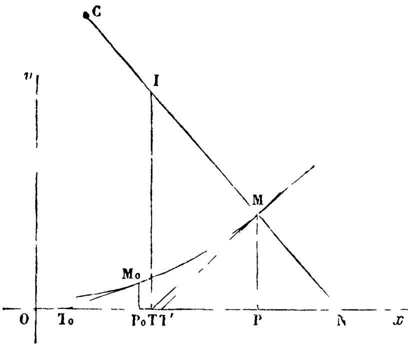
$$\frac{MT}{TT'} = \frac{\sin MT'x}{\sin TMT'},$$

ou, en désignant par $t$ la longueur, prise avec son signe, de la tangente MT, et négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

(5) $$t = \frac{d\lambda}{d\theta}\sin\theta.$$

On déduit de là que si la perpendiculaire élevée à $Ox$

Fig. 8.




par le point T coupe au point I la normale correspondante, on a

$$\mathrm{TI} = \frac{d\lambda}{d\theta}.$$

Les coordonnées du point M rapporté à l'axe $Ox$ et à la perpendiculaire $Oy$ à cet axe sont immédiatement données par les formules

$$y = \frac{d\lambda}{d\theta}\sin^2\theta,$$

$$x = \lambda + \frac{d\lambda}{d\theta}\sin\theta\cos\theta.$$

*Remarque.* — Les valeurs de $\theta$ pour lesquelles $\frac{d\lambda}{d\theta}\sin\theta$ devient infini font connaître les asymptotes.

45. Les coordonnées $\lambda$ et $\theta$ ne permettent pas de définir les droites parallèles à $Ox$; mais on peut déterminer les tangentes à une courbe donnée, parallèles à $Ox$, par leurs distances à cet axe, en cherchant la limite de $y = \frac{d\lambda}{d\theta}\sin^2\theta$ pour $\theta = K\pi$, et l'on a ensuite les points de contact de ces tangentes en cherchant la limite de

$$x = \lambda + \frac{d\lambda}{d\theta}\sin\theta\cos\theta$$

pour la même valeur de $\theta$.

46. *Rayon de courbure.* — Nous avons appelé I le point où la perpendiculaire à $Ox$, élevée par le point T, coupe la normale à la courbe au point M; soit C le centre de courbure répondant à ce point M; nous avons, d'après une formule bien connue,

$$d(\mathrm{MT}) = \mathrm{CI}\, d\theta;$$

par suite,

$$\mathrm{MC} = \mathrm{MT} + \frac{d(\mathrm{MT})}{d\theta}$$

ou, en appelant $r$ le rayon de courbure,

$$r = t\cot\theta + \frac{dt}{d\theta},$$

c'est-à-dire, d'après la formule (5),

$$r = 2\frac{d\lambda}{d\theta}\cos\theta + \frac{d^2\lambda}{d\theta^2}\sin\theta. \tag{6}$$

On a ensuite la longueur d'un arc de la courbe par la formule

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta} r\, d\theta. \tag{7}$$

47. *Évaluation des aires.* — On a très simplement l'aire comprise entre la courbe, l'axe $Ox$, et deux tan-

gentes quelconques $(\lambda_0, \theta_0)$ et $(\lambda, \theta)$ en divisant cette aire en triangles infinitésimaux par les tangentes menées aux points intermédiaires entre $M_0$ et $M$; la surface de chacun de ces petits triangles est égale à

$$\tfrac{1}{2}t(t+dt)\sin d\theta,$$

ou, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, à

$$\frac{t^2\,d\theta}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{d\lambda}{d\theta}\sin\theta\right)^2 d\theta;$$

il viendra, par suite, pour l'expression de l'aire cherchée

$$(8) \qquad \sigma = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta}\left(\frac{d\lambda}{d\theta}\sin\theta\right)^2 d\theta.$$

Si l'on veut l'aire $\Sigma$ comprise entre la courbe, l'axe $Ox$ et les ordonnées $M_0P_0$ et $MP$, on a

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \Sigma &= \sigma + \text{tr.}\,MTP - \text{tr.}\,M_0T_0P_0 \\ &= \frac{1}{2}\Bigg[\int_{\theta_0}^{\theta}\left(\frac{d\lambda}{d\theta}\sin\theta\right)^2 d\theta \\ &\qquad + \left(\frac{d\lambda}{d\theta}\sin\theta\right)^2\sin\theta\cos\theta - \left(\frac{d\lambda_0}{d\theta_0}\sin\theta_0\right)^2\sin\theta_0\cos\theta_0\Bigg].\end{aligned}\right.$$

## VIII. — Applications.

48. *Trouver une courbe dont la tangente ait une longueur constante $l$.* — Cette courbe est celle que décrit un point lié par un fil inextensible à un point qui se meut sur une droite indéfinie; de là le nom de *tractrice*.

La formule (5) (n° 44) donne immédiatement pour l'équation différentielle de la courbe

$$l = \frac{d\lambda}{d\theta}\sin\theta \quad \text{ou} \quad d\lambda = \frac{l\,d\theta}{\sin\theta}.$$

Intégrons, en faisant en sorte que $\lambda = 0$ pour $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$\lambda = l.\mathrm{L}\,\mathrm{tang}\,\frac{\theta}{2} \quad \text{ou} \quad e^{\frac{\lambda}{l}} = \mathrm{tang}\,\frac{\theta}{2}.$$

Telle est l'équation de la tractrice.

Cette courbe (*fig.* 9) présente un point de rebroussement A sur la perpendiculaire OY à OX et s'étend symétriquement de part et d'autre de cet axe en tendant asymptotiquement vers l'axe OX. On a

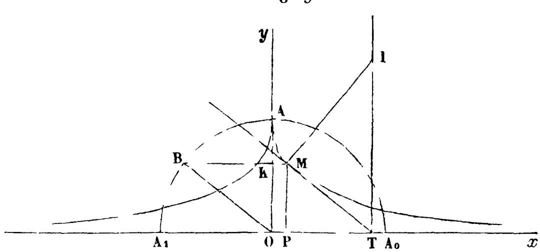
$$\frac{d\lambda}{d\theta} = \frac{l}{\sin\theta}, \quad \frac{d^2\lambda}{d\theta^2} = \frac{-l\cos\theta}{\sin^2\theta};$$

par suite, la formule (6) donne pour le rayon de courbure

$$r = l\cot\theta,$$

ce qui montre que le centre de courbure est au point de rencontre I de la normale à la courbe et de la per-

Fig. 9




pendiculaire TI à $Ox$, résultat qu'il était bien aisé de prévoir.

Cherchons la longueur de l'arc, comptée à partir du point de rebroussement A. La formule (7) donne

$$s = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} l\cot\theta\, d\theta = l.\mathrm{L}\sin\theta.$$

Évaluons maintenant l'aire OAMT ; nous avons, d'après la formule (8),

$$\sigma = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} l^2\,d\theta = \frac{\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) l^2}{2}.$$

Or traçons du point O comme centre un cercle de rayon égal à $l$, c'est-à-dire passant par le point A, et tirons la droite OB parallèle à MT ; nous avons

$$\widehat{AOB} = \theta - \frac{\pi}{2};$$

donc

$$\text{aire secteur AOB} = \frac{\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) l^2}{2};$$

par suite,

$$\text{aire OAMT} = \text{aire OAB}.$$

Si nous voulons avoir l'aire OAMP, il suffit de retrancher de l'aire précédente celle du triangle MTP ; et comme ce triangle est égal à OBK, on voit que

$$\text{aire OAMP} = \text{aire ABK}.$$

Il résulte de l'une ou l'autre de ces expressions que l'aire totale comprise entre la tractrice et l'axe $Ox$ est égale à l'aire du demi-cercle $OA_0AA_1$.

49. *Trouver une courbe telle que la portion* TI (*fig.* 10) *de la perpendiculaire à* $Ox$ *menée par le pied* T *de la tangente, et limitée, d'une part à* $Ox$, *de l'autre à la normale correspondante, ait une longueur constante* $l$. — Nous avons vu (n° 44) que

$$\text{TI} = \frac{d\lambda}{d\theta};$$

par suite,

$$\frac{d\lambda}{d\theta} = l$$

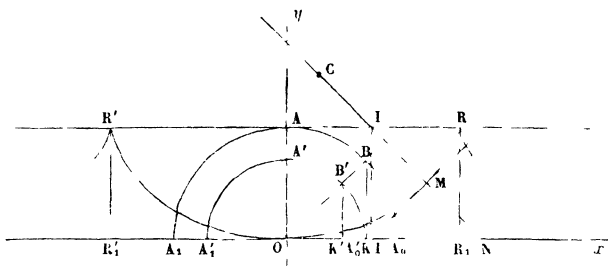
et

$$\lambda = l\theta,$$

en prenant $\lambda = 0$ pour $\theta = 0$.

C'est une cycloïde (*fig.* 10) dont les points de rebrous-

Fig. 10.




sement R, R', ... sont sur la parallèle à OX menée par le point A tel que $OA = l$.

L'équation de la courbe montre que, si l'on trace le demi-cercle $A_0 A A_1$ de centre O et de rayon égal à $l$, on a

$$OT = \text{arc}\, A_0 B.$$

De plus, d'après la formule (5), on a

$$MT = l \sin\theta = BK,$$

BK étant la perpendiculaire abaissée de B sur $Ox$.

La formule (6) donne, pour le rayon de courbure,

$$r = 2l\cos\theta,$$

ou, puisque $TI = l$,

$$MC = 2MI;$$

on reconnaît bien là une des propriétés caractéristiques de la cycloïde.

La formule (7) donne, pour l'arc compté à partir du point O,

$$s = 2l\int_0^\theta \cos\theta\, d\theta = 2l\sin\theta = 2\,\mathrm{MT} = 2\,\mathrm{BK}.$$

L'arc OR a donc pour longueur $2l$.

Quant à l'aire OMT, elle est donnée, d'après la formule (8), par

$$\sigma = \frac{1}{2}\int l^2 \sin^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{l^2\theta}{2} - \frac{l^2\sin 2\theta}{4}\right).$$

Mais nous avons

$$\text{aire secteur } \mathrm{OA_0B} = \frac{l^2\theta}{2},$$

$$\text{aire triangle OBK} = \frac{1}{2}\, l\cos\theta \,.\, l\sin\theta = \frac{l^2 \sin 2\theta}{4};$$

par suite,

$$\text{aire OMT} = \frac{\text{aire } \mathrm{A_0BK}}{2}.$$

On peut aussi prendre le demi-cercle $A'_0A'A'_1$ de rayon égal à $\frac{l}{\sqrt{2}}$, et qui est coupé par OB au point B'; on a

$$\text{aire OMT} = \text{aire } \mathrm{A'_0B'K'}.$$

Il résulte de là que

$$\text{aire } \mathrm{ORR_1} = \frac{\text{aire } \mathrm{A_0BAO}}{2} = \text{aire } \mathrm{A'_0B'A'O}.$$

50. *Trouver une courbe telle que la distance* OD *de chacune de ses tangentes au point* O *soit égale à la longueur* MN *de la normale correspondante* (*fig.* 11). — La distance OD du point O à la tangente $(\lambda, \theta)$ est égale à $\lambda\sin\theta$.

Quant à la normale, elle est donnée par

$$\mathrm{MN} = \mathrm{MT}\,\mathrm{tang}\,\theta = \frac{d\lambda}{d\theta}\,\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}.$$

On doit donc avoir (¹)

$$\lambda \sin\theta = \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta},$$

ou

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{d\theta}{\operatorname{tang}\theta}.$$

Intégrons, il vient

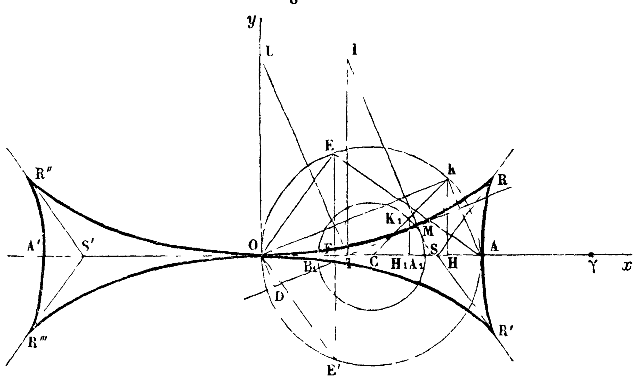
$$L\lambda = L\sin\theta + C$$

ou

$$\lambda = a \sin\theta.$$

Telle est l'équation de la courbe cherchée; étudions en

Fig. 11.




détail ses propriétés géométriques qui, on va le voir, sont assez curieuses.

D'abord la longueur de la tangente est donnée, d'après la formule (5), par

$$t = a \cos\theta \sin\theta.$$

Cette équation, jointe à la précédente, montre que la

(¹) Il est important de remarquer que nous supposons ici les segments OD et MN de part et d'autre de la tangente; dans le cas contraire, il faudrait changer le signe du second membre, et l'on trouverait pour solutions une parallèle à $Ox$ et un cercle de centre O.

courbe peut se construire point par point de la manière suivante : portons sur l'axe $Ox$ la longueur $OA = a$, et traçons le cercle, de centre C, qui a OA pour diamètre; tirons la droite OK faisant avec $Ox$ l'angle $\theta$ et joignons le point A au point K; nous avons

$$AK = OA \sin\theta = a \sin\theta = \lambda;$$

abaissons maintenant sur $Ox$ la perpendiculaire KH; nous avons

$$KH = AK \cos\theta = a \sin\theta \cos\theta = t;$$

de là, la construction suivante : *porter sur* $Ox$ *la longueur* $OT = AK$, *puis sur la parallèle à* OK, *menée par le point* T, *la longueur* $TM = HK$; *on a ainsi la tangente* MT *et son point de contact* M.

MN étant la normale, remarquons que

$$TN = \frac{TM}{\cos\theta} = a \sin\theta = OT,$$

propriété que nous pouvons énoncer ainsi : *le segment de l'axe* $Ox$ *compris entre la tangente et la normale est égal au* $\lambda$ *de la tangente.*

De ce que $AK = OT = TN$, résulte l'égalité des triangles OAK et INT, IT étant perpendiculaire à $Ox$; par suite,

$$IN = OA = a,$$

c'est-à-dire que *la portion de la normale comprise entre l'axe* $Ox$ *et la perpendiculaire à cet axe menée par le point* T *est constante et égale à* $a$.

Remarquons aussi que $IT = OK$.

Par le point T, élevons à MT une perpendiculaire qui coupe l'axe $Oy$ au point U; puisque $OT = TN$, les triangles OTU et TNI sont égaux, et par suite

$$TU = NI = a;$$

le segment TU est de longueur constante; de là ce théorème :

*Si l'un des côtés d'un angle droit est de longueur constante et glisse entre deux axes rectangulaires, l'autre côté enveloppe la courbe qui nous occupe.* Cela fournit un mode de génération mécanique de cette courbe, par ses tangentes.

Le rayon de courbure, d'après la formule (6), est donné par

$$r = 2a\cos^2\theta - a\sin^2\theta = \frac{a}{2} + \frac{3a}{2}\cos 2\theta,$$

expression qui se construit géométriquement de la manière suivante : *prendre sur* $Ox$ *le segment* $C\gamma = 3\,CH$; *le rayon de courbure au point* M *est égal à* $O\gamma$, car

$$\widehat{KCA} = 2\,\widehat{KOA} = 2\theta.$$

Valeurs remarquables du rayon de courbure :

Au point O, $r = 2a$.

Aux points pour lesquels $\cos 2\theta = \frac{1}{3}$ et qui s'obtiennent en prenant pour la longueur CH le $\frac{1}{3}$ de CA, $r = a$.

Aux points pour lesquels $\theta = \frac{\pi}{4} + K\frac{\pi}{2}$, $r = \frac{a}{2}$.

Aux points A et A′, $r = -a$.

Il y a quatre points de rebroussement R, R′, R″, R‴ correspondants aux valeurs de $\theta$ pour lesquelles $r$ s'annule, c'est-à-dire pour lesquelles $\cos 2\theta = -\frac{1}{3}$. Pour obtenir ces points, prenons le segment CF égal à $\frac{CA}{3}$ et compté négativement à partir du point C, puis élevons par le point F la perpendiculaire EE′ à $Ox$; prenant OS = AE, menant par le point S des parallèles à OE et OE′, et portant sur ces droites les segments SR et SR′ égaux à EF, nous avons les points de rebroussement R et R'. Les autres sont les symétriques de ceux-ci par rapport à $Oy$, car la portion de la courbe, à gauche de $Oy$, répondant aux valeurs de $\theta$ comprises entre $\pi$ et $2\pi$, est symétrique de la portion à droite qui correspond aux valeurs comprises entre O et $\pi$. D'ailleurs, chacune de ces branches se compose elle-même de deux parties symétriques par rapport à $Ox$.

La courbe est ainsi parfaitement connue de forme; il reste à en trouver la rectification et la quadrature.

La longueur de l'arc, comptée à partir du point O, est donnée par

$$s = \int_0^\theta r\,d\theta = \int_0^\theta \left(\frac{a}{2} + \frac{3a}{2}\cos 2\theta\right) d\theta = \frac{a\theta}{2} + \frac{3a}{4}\sin 2\theta.$$

Traçons le cercle de centre C, dont le rayon $CA_1$ est moitié de CA, c'est-à-dire égal à $\frac{a}{4}$; ce cercle est coupé par CK au point $K_1$; abaissons sur $Ox$ la perpendiculaire $K_1H_1$; nous avons

$$\text{arc } A_1K_1 = \frac{a}{4}2\theta = \frac{a\theta}{2},$$

$$K_1H_1 = \frac{a}{4}\sin 2\theta;$$

donc

$$\text{arc } OM = \text{arc } A_1K_1 + 3K_1H_1.$$

Pour l'aire comprise entre la courbe, l'axe $Ox$, et la tangente MT, elle est donnée, d'après la formule (8), par

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{2}\int_0^\theta (a\cos\theta\sin\theta)^2\,d\theta \\ &= \frac{a^2}{8}\int_0^\theta \sin^2 2\theta\,d\theta = \frac{a^2}{16}\left(\theta - \frac{\sin 4\theta}{4}\right);\end{aligned}$$

Or,

$$\text{aire secteur } CA_1K_1 = \frac{1}{2}\frac{a^2}{16}2\theta = \frac{a^2\theta}{16},$$

$$\text{aire } CK_1H_1 = \frac{1}{2}\frac{a}{4}\cos 2\theta\frac{a}{4}\sin 2\theta = \frac{a^2\sin 4\theta}{4\times 16};$$

par suite,

$$\text{aire OMT} = \text{aire } CA_1K_1 - CK_1H_1 = \text{aire } A_1K_2H_1.$$

De là résulte que

$$\text{aire ORA} = \text{aire } A_1K_1B_1$$

et

$$\text{aire ORR}' = \text{aire cercle } A_1B_1.$$

(*A suivre.*)