# Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 3 (1884), p. 531-543

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__531_1>

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

### *Question* 487

(voir 1re série, t. XVIII, p. 357);

PAR M. H. BROCARD.

*Dans tout tétraèdre :* 1° *Les quatre hauteurs donnent lieu, prises deux à deux, à six plus courtes distances parallèles aux six arêtes du tétraèdre;* 2° *ces six plus* *courtes distances donnent lieu, prises deux à deux, à quinze plus courtes distances dont douze sont nulles, et dont les trois autres sont parallèles aux trois plus courtes distances des arêtes opposées du tétraèdre.*

1° Désignons par A, B, C, D les plans des faces opposées aux sommets $a$, $b$, $c$, $d$ du tétraèdre; par $\delta(a, b)$ la plus courte distance des hauteurs $a$H, $b$H partant des sommets $a$ et $b$.

Par définition, $\delta(a, b)$ est parallèle à une droite située dans le plan perpendiculaire à chacune des hauteurs $a$H, $b$H. Donc $\delta(a, b)$ *est parallèle* à l'arête d'intersection des plans A, B, c'est-à-dire *à l'arête cd du tétraèdre.*

Il y a quatre hauteurs, c'est-à-dire $\frac{4.3}{1.2} = 6$ plus courtes distances parallèles à chacune des arêtes du tétraèdre.

2° Les six plus courtes distances, prises deux à deux, donnent $\frac{6.5}{1.2} = 15$ plus courtes distances.

La plus courte distance entre $\delta(a, b)$ et $\delta(c, d)$, par exemple, est perpendiculaire à chacune de ces droites; mais ces droites sont parallèles aux arêtes $ab$, $cd$ du tétraèdre; donc la plus courte distance en question est parallèle à la plus courte distance de ces arêtes opposées. Or, il y a trois couples d'arêtes opposées ($ab$, $cd$; $ac$, $bd$; $ad$, $bc$). Il y a donc trois plus courtes distances parallèles aux plus courtes distances de ces arêtes.

Reste à démontrer que les douze autres sont nulles. $\delta(a, b)$, par exemple, est parallèle à $cd$; $\delta(a, c)$ est parallèle à $bd$; donc la plus courte distance entre $\delta(a, b)$ et $\delta(a, c)$ est parallèle à la plus courte distance entre $cd$ et $bd$. Mais ces droites se rencontrent. Ainsi la plus courte distance entre ces droites est *nulle* et n'a *pas de* *direction déterminée.* De cette indétermination résulte que la plus courte distance en question est nulle.

## *Question* 1437

(voir 3e série, t. II, p. 192);

PAR M. MORET-BLANC.

*$u_n$ désignant le $n^{ième}$ terme de la série de Lamé, on a*

$$(2u+1)^n - u^{3n} = 0,$$

*pourvu que l'on remplace les exposants par des indices.* (E. CESARO.)

Soit la série de Lamé

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987,...

dont chaque terme, à partir du troisième, est égal à la somme des deux qui le précèdent. On a, d'après la loi de formation,

$$u_{3(n+1)} = u_{3n+2} + u_{3n+1} = u_{3n+1} + u_{3n} + u_{3n+1},$$

d'où

$$u_{3(n+1)} = 2u_{3n+1} + u_{3n},$$

ou symboliquement

$$u^{3(n+1)} = u^{3n}(2u+1),$$

les exposants de $u$ devant être remplacés par des indices. Or

$$u^3 = (2u+1);$$

donc

$$u^6 = (2u+1)^2,$$
$$u^9 = (2u+1)^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$u^{3n} = (2u+1)^n,$$

ou

$$(2u+1)^n - u^{3n} = 0, \quad \text{symboliquement.}$$

*Note.* — La même question a été résolue par M. A. Droz.

## *Question* 1454

(voir 3ᵉ série, t. II, p. 336),

PAR M. H. FAURE.

*On donne une sphère et un point dans son intérieur; de ce point on mène trois cordes, telles que le pôle du plan de deux quelconques d'entre elles soit sur la troisième : la somme des inverses des carrés de ces cordes est constante.* (MANNHEIM.)

A la page 13 du tome XVI des *Nouvelles Annales*, 2ᵉ série, j'ai démontré le théorème suivant :

*La somme des inverses des indices des arêtes d'un trièdre conjugué à une surface du second ordre est égale au carré de la distance du centre de la surface au sommet du trièdre, diminué de la somme des carrés des demi-axes de la surface, et divisé par l'indice du sommet du trièdre, pris en signe contraire.*

Si l'on suppose que la surface du second degré est une sphère, on a le théorème de M. Mannheim.

Si l'on désigne, en effet, par $\lambda$, $\mu$, $\nu$ les arêtes du trièdre, par $S^2$ la somme des carrés des demi-axes de la surface, par $o$ son centre, par $a$ le sommet du trièdre, notre théorème donne

$$\frac{1}{I_\lambda} + \frac{1}{I_\mu} + \frac{1}{I_\nu} = \frac{S^2 - \overline{oa}^2}{I_a}.$$

Si donc $\lambda$, $\mu$, $\nu$ sont les longueurs des cordes déterminées dans la surface par les droites $\lambda$, $\mu$, $\nu$; et $\lambda_1$, $\mu_1$, $\nu_1$ les demi-diamètres parallèles à ces cordes,

$$I_\lambda = -\frac{\lambda^2}{4\lambda_1^2}, \quad I_\mu = -\frac{\mu^2}{4\mu_1^2}, \quad I_\nu = -\frac{\nu^2}{4\nu_1^2};$$

on a donc la relation

$$\frac{\lambda_1^4}{\lambda^2}+\frac{\mu_1^4}{\mu^2}+\frac{\nu_1^4}{\nu^2}=\frac{\overline{oa}^2-S^2}{4I_a}.$$

Maintenant, si la surface devient une sphère de rayon R,

$$I_a=\frac{oa^2-R^2}{R^2},$$

par conséquent

$$\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\mu^2}+\frac{1}{\nu^2}=\frac{\overline{oa}^2-3R^2}{4R^2(oa^2-R^2)}.$$

*Note.* — La même question a été résolue par MM. Genty et Moret-Blanc.

---

## *Question* 1455

(voir 3e série, t. II, p. 336);

PAR M. E. BARISIEN,

Lieutenant au 141e de ligne.

*On considère deux droites rectangulaires et un cercle tangent à ces deux droites; le lieu des foyers des paraboles tangentes, à la fois, aux deux droites et à la circonférence, est une circonférence tangente aux deux droites.* (WEILL.)

Prenons les deux droites rectangulaires OX, OY pour axes de coordonnées. Soient $r$ le rayon du cercle, A, B les points de contact de la parabole avec les axes OX, OY; et P, Q les points où la tangente, commune en M au cercle et à la parabole, rencontre ces mêmes axes (¹).

Posons

$$OA=\alpha,\quad OB=\beta,\quad OP=p,\quad OQ=q.$$

---

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure.

On sait que l'équation générale des paraboles tangentes aux trois côtés OP, OQ, PQ d'un triangle rectangle peut se mettre sous la forme

$$\sqrt{\frac{x}{\alpha}} + \sqrt{\frac{y}{6}} = 1, \tag{1}$$

avec la condition

$$\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{6} = 1 \quad [1]. \tag{2}$$

Nous allons exprimer que le cercle et la parabole sont tangents au même point M à la droite PQ. Pour cela, commençons par écrire que PQ est tangent au cercle en M, puis ensuite que le point M de contact est sur la parabole.

Le triangle rectangle POQ donne

$$\overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2,$$

ou

$$(MP + MQ)^2 = p^2 + q^2.$$

Mais

$$MP = p - r \quad \text{et} \quad MQ = q - r;$$

donc

$$(p + q - 2r)^2 = p^2 + q^2,$$

$$p + q - 2r = \sqrt{p^2 + q^2}, \tag{3}$$

relation qui revient à

$$pq = 2r(p + q - r). \tag{4}$$

Actuellement, menons du point M les perpendiculaires MR, MS aux axes OX, OY. Les coordonnées $x, y$ de M s'obtiennent facilement au moyen des triangles semblables MSQ, MRP et OPQ. En effet

$$\frac{MS}{MQ} = \frac{OP}{PQ}; \quad \text{d'où MS} \quad \text{ou } x = \frac{p(q - r)}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{p(q - r)}{p + q - 2r}.$$

---

[1] Les formules (1) et (2) ont déjà été employées dans les *Nouvelles Annales* (*voir* 2e série, t. XI, p. 88).

De même

$$y = \frac{q(p-r)}{p+q-2r}.$$

En portant ces valeurs des coordonnées du point M dans l'équation (1) de la parabole, équation qui peut s'écrire

$$\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{6} - 1\right)^2 = \frac{4xy}{\alpha 6},$$

on a

$$\left[\frac{p(q-r)}{\alpha} + \frac{q(p-r)}{6} - (p+q-2r)\right]^2 = \frac{4pq}{\alpha 6}(q-r)(p-r),$$

ou

$$\left[pq\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{6}\right) - r\left(\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{6}\right) - (p+q) + 2r\right]^2$$
$$= \frac{4pq}{\alpha 6}\left[pq - r(p+q-r)\right].$$

En tenant compte des relations (2) et (4), il vient

$$\left[pq\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{6}\right) - \frac{pq}{2r}\right]^2 = \frac{4pq}{\alpha 6}\left(pq - \frac{pq}{2}\right).$$

et enfin

$$(5) \qquad \alpha 6\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2r}\right)^2 = 2.$$

Le foyer F de la parabole est à l'intersection de la droite AB et de la perpendiculaire OF abaissée du point O sur AB. Ces deux droites ont pour équations

$$(6) \qquad 6x + \alpha y = \alpha 6,$$
$$(7) \qquad \alpha x - 6y = 0.$$

Pour avoir l'équation du lieu des foyers, il suffit d'éliminer $\alpha$ et $6$ entre les équations (5), (6) et (7).

Or des équations (6) et (7) on tire

$$\alpha = \frac{x^2+y^2}{x}, \quad 6 = \frac{x^2+y^2}{y}.$$

En portant ces valeurs de $\alpha$, $\beta$ dans l'équation (5), on a

$$[x^2+y^2-2r(x+y)]^2 = 8r^2xy;$$

et, en développant et supprimant le facteur $(x^2+y^2)$, il vient

$$x^2+y^2-4r(x+y)+4r^2=0,$$

équation qui représente un cercle tangent aux axes, et de rayon $2r$ (¹).

*Note.* — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

---

## *Question* 1476

(voir 3ᵉ série, t. II, p. 479);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE.

*Trouver les solutions entières de l'équation*

$$x^3+x^2+x+1=v^2.$$

(LIONNET.)

Cette question, proposée autrefois par M. Brocard, a été résolue complètement par M. Gerono dans le numéro de mai 1877 des *Nouvelles Annales*. L'équation ci-dessus n'admet en réalité que les solutions $x=1$, $x=7$. Ce théorème remarquable peut aussi se déduire d'une proposition de Fermat, énoncée dans les recherches de M. Ch. Henry sur les manuscrits de l'illustre géomètre.

L'équation proposée peut, en effet, s'écrire

$$(x+1)(x^2+1)=v^2,$$

et, après avoir remarqué que les facteurs $(x+1)$ et

---

(¹) La circonférence que cette équation représente est, au point F, tangente à la circonférence circonscrite au triangle rectangle OPQ. Le milieu de la droite OF est le point de contact du cercle des neuf points du triangle OPQ, et du cercle inscrit à ce triangle. (G.)

$(x^2+1)$ ont 2 pour diviseur commun, on est conduit au système d'équations $(x+1) = 2m^2$, $x^2+1 = 2n^2$.

Or la proposition de Fermat, dont nous parlons, revient à dire que le système de ces deux équations n'admet de solutions en nombres entiers que pour $x = 7$ (en écartant les solutions évidentes $x = \pm 1$).

M. Genocchi a donné une démonstration très simple de ce théorème dans le numéro de juillet 1883 des *Nouvelles Annales*.

---

## *Question* 1495

(voir 3e série, t. III, p. 399);

PAR M. N. GOFFART.

*Le nombre total des solutions entières, non négatives, des équations*

$$x + 4y = 3(n-1),$$
$$4x + 9y = 5(n-2),$$
$$9x - 16y = 7(n-3),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

*est égal à* $n$.

(Ernest Cesaro.)

La forme générale des équations ci-dessus est

$$a^2x + (a+1)^2y = [(a+1)^2 - a^2](n-a);$$

on en tire

$$\frac{a^2}{(a-1)^2} = \frac{n-a-y}{n-a+x}.$$

Or, $a$ et $a+1$ étant premiers entre eux, $n-a+x$ et $n-a-y$ sont respectivement des équimultiples de $(a+1)^2$ et de $a^2$; donc on a, pour les systèmes de solutions générales des équations ci-dessus,

$$n-a-y = ma^2,$$
$$n-a-x = m(a+1)^2;$$

d'où

$$x = m(a+1)^2 - (n-a),$$
$$y = (n-a) - ma^2.$$

Si l'on écarte les solutions négatives, il faut poser

$$ma^2 \leq n - a \leq m(a+1)^2$$

ou

$$\frac{n-a}{a^2} \geq m \geq \frac{n-a}{(a+1)^2}.$$

En attribuant à $a$ toutes les valeurs de 1 à $n$, on voit que $m$ peut recevoir toutes les valeurs entières comprises dans la suite

$$\frac{n-1}{1} \cdots \frac{n-1}{2^2}, \quad \frac{n-2}{2^2} \cdots \frac{n-2}{3^2},$$
$$\frac{n-3}{3^2} \cdots \frac{n-3}{4^2}, \cdots \frac{n-n}{n^2} \cdots \frac{n-n}{(n+1)^2}.$$

Soit

$$m = n-1,\ n-2\ \ldots\ 2,\ 1,\ 0,$$

en tout $n$ valeurs. C. Q. F. D.

*Application.* $n = 10$.

$$a = 1, \quad \frac{10-1}{1} \geq m \geq \frac{10-1}{4}; \quad \text{d'où} \quad m = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3$$

et

$$\begin{cases} x = 27, 23, 19, 15, 11, 7, 3, \\ y = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{cases}$$

$$a = 2, \quad \frac{10-2}{4} \geq m \geq \frac{10-2}{9}, \quad \text{d'où} \quad m = 2, 1$$

et

$$\begin{cases} x = 10, 1, \\ y = 0, 4; \end{cases}$$

$a = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ ne donnent pas de solutions, $m$ devant être entier. $a = 10$ donne

$$m = 0,$$
$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

*Note.* — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et Renoy.

## *Question* 1496

(voir 3ᵉ série, t. III, p 399);

PAR M. N. GOFFART.

*Une ellipse et une hyperbole sont telles que les asymptotes de l'hyperbole sont deux diamètres conjugués de l'ellipse; prouver que, en faisant un choix convenable d'axes de coordonnées, on pourra donner respectivement aux équations des deux courbes les formes*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=m.$$

(WOLSTENHOLME.)

Les deux courbes rapportées aux axes OX, OY qui sont des diamètres conjugués de l'ellipse et des asymptotes de l'hyperbole ont pour équations

$$(1)\qquad \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,\quad xy=h^2.$$

Une droite $y=\rho x$ coupe l'ellipse en des points pour lesquels les tangentes auront une même direction si l'on pose

$$\rho=\pm\frac{\beta}{\alpha}.$$

Soient les nouveaux axes OX', OY' ayant pour équations

$$\alpha y-\beta x=0,\quad \alpha y+\beta x=0.$$

Faisons angle $XOX'=\varphi$, $XOY'=\varphi'$, $XOY=\theta$; les formules de transformation seront

$$(2)\qquad \begin{cases} y\sin\theta = x'\sin\varphi+y'\sin\varphi',\\ x\sin\theta = x'\sin(\theta-\varphi)-y'\sin(\varphi'-\theta).\end{cases}$$

Si l'on remarque qu'en outre

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\theta - \varphi)} = \frac{\sin\varphi'}{\sin(\varphi' - \theta)},$$

les équations (1) se réduiront à

$$x'^2 \frac{2\sin^2\varphi}{\beta^2\sin^2\theta} + y'^2 \frac{2\sin^2\varphi'}{\beta^2\sin^2\theta} = 1,$$

$$x'^2 \frac{\alpha\sin^2\varphi}{\beta h^2\sin^2\theta} - y'^2 \frac{\alpha\sin^2\varphi'}{\beta h^2\sin^2\theta} = 1.$$

Et si l'on pose

$$\frac{\beta^2\sin^2\theta}{2\sin^2\varphi} = a^2, \quad \frac{\beta^2\sin^2\theta}{2\sin^2\varphi'} = b^2 \quad \text{et} \quad \frac{2h^2}{\alpha\beta} = m,$$

il viendra enfin

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = m.$$

C. Q. F. D.

*Note.* — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

---

## *Question* 1497

(voir 3ᵉ série, t. III, p. 399);

PAR M. MORET-BLANC.

*Étant données deux droites fixes, on considère deux cercles de même rayon, tangents entre eux et touchant chacun une des droites. Le point commun à l'un de ces cercles et à la droite correspondante étant fixe, on demande le lieu du point de contact des deux cercles lorsqu'on fait varier leur rayon.* (D'OCAGNE.)

Je prends le point de contact fixe pour origine, la tangente en ce point pour axe des $y$, et sa perpendiculaire pour axe des $x$. Soit $b$ la distance de l'origine au sommet de l'angle que je suppose placé du côté des $y$

négatifs. L'équation du second côté sera

$$y = mx - b. \tag{1}$$

$r$ étant le rayon des courbes; $x$, $y$ les coordonnées de leur point de contact; celles du centre du second cercle seront $2x - r$ et $2y$. Écrivons que le carré de la distance de ce point au centre du premier cercle est égal à $4r^2$, et que sa distance à la droite (1) est égale à $r$ :

$$4(x-r)^2 + 4y^2 = 4r^2, \quad \text{ou} \quad (x-r)^2 + y^2 = r^2,$$

$$x^2 + y^2 - 2rx = 0, \tag{2}$$

$$2y - 2mx + mr + b = \pm r\sqrt{1+m^2}, \tag{3}$$

d'où

$$r = \frac{x^2+y^2}{2x} = \frac{2y - 2mx + b}{\pm\sqrt{1+m^2} - m}$$
$$= \left(m \pm \sqrt{1+m^2}\right)(2y - 2mx + b),$$

et, en éliminant $r$,

$$\left[1 + 4m\left(m \pm \sqrt{1+m^2}\right)\right]x^2$$
$$- 4\left(m \pm \sqrt{1+m^2}\right)xy + y^2 - 2b\left(m \pm \sqrt{1+m^2}\right)x = 0.$$

Le lieu se compose de deux hyperboles.

*Note.* — La même question a été résolue par M. Goffart.